IV (ЗАКЛЮЧНИЙ) ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

LVIII Всеукраїнська математична олімпіада

У березні 2018 року IV етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики відбувся в місті Одесі. У змаганні взяли участь 173 учні з усіх регіонів України: 44 — за 8 клас, 46 — за 9 клас, 41 — за 10 клас, 42 — за 11 клас. Учасники розв'язували задачі протягом двох днів. Щодня в кожній паралелі пропонували 4 + 1 задачу на 4 години 5 хвилин.

Перший день

Давно відомо, що 20 відсотків людей
виконують 80 відсотків роботи.
Нещодавно з'ясувалося, що 80 відсотків людей
вважають, що вони входять до цих 20 відсотків.

З фольклору

8 клас

1 (124). Відомо, що для деякого значення a справджується рівність $a^4-\frac{1}{a^2}=4$. Чи може бути цілим число $x=a^4+\frac{1}{a^2}$?

2 (125). Чи існує прямокутник, який можна розрізати на п'ять квадратів, серед яких два однакові, а всі інші — попарно різні та відмінні від однакових, при цьому однакові квадрати є:
а) найменшими з усіх; б) найбільшими з усіх?

3 (126). Знайдіть найбільше трицифрове число n, для якого виконується така умова: існує рівно 16 пар натуральних чисел (a, b), де $a < b$, для яких n є найменшим спільним кратним.

(Богдан Рубльов)

4 (127). У трикутнику ABC відмічено ортоцентр H і проведено висоту AK. Коло ω проходить через точки A і K та перетинає сторони AB і AC у точках M та N відповідно. Пряма, що проходить через точку A паралельно стороні BC, удруге перетинає описані кола трикутників AHM та AHN у точках X і Y відповідно. Доведіть, що $XY = BC$.

(Данило Хілько)

9 клас

1 (128). В олімпіаді взяли участь 60 школярів. Їм було запропоновано вісім задач, кожну з яких оцінювали від 0 до 7 балів. Доведіть, що обов'язково будуть три учасники, чиї резільтати попарно відрізняються не більше ніж на 1 бал. Чи справдилося б твердження задачі, якби в олімпіаді взяли участь 58 школярів?

Примітка. Результат учасника олімпіади — це загальна кількість набраних ним балів.

2 (129). Андрій за квітень прочитав товсту книгу. Він читав за таким графіком: з 1 по 20 квітня хлопець прочитував у середньому по 20 сторінок за день, із 6 по 25 квітня — у середньому по 30 сторінок за день, а з 11 по 30 квітня — у середньому по 40 сторінок за день. Яку максимальну та мінімальну кількість сторінок могла мати ця книга?

(Богдан Рубльов)

3 (130). У гострокутному трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці W. З точки W на пряму AB опустили перпендикуляр WU, а із центра вписаного кола I цього трикутника опустили перпендикуляр IP на пряму WU. Нехай точка M — середина відрізка BC. Доведіть, що пряма MP проходить через середину відрізка CI.

(Микола Мороз)

4 (131). Дільники складеного натурального числа n, яке не є квадратом простого числа, позначимо в порядку зростання таким чином: $1<d_1<d_2<\ldots<d_{l-1}<d_l<n$, $l\geqslant 2$. Для яких n існують натуральні числа a, b та N, що задовольняють умови $d_1+d_2=N^a$ та $d_{l-1}+d_l=N^b$?

(Богдан Рубльов)

10 клас

1 (132). Розв'яжіть у натуральних числах x, y, p, n, k систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x+y=p^k, \\ 5y+x=p^{k+n}. \end{cases}$$

(Богдан Рубльов)

2 (133). Дано рівнобедрений тупокутний трикутник ABC з вершиною в точці B. Серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає прямі AC і AB у точках K і M відповідно. Доведіть, що точка, симетрична точці A відносно прямої BK, лежить на прямій CM.

(Антон Тригуб)

3 (134). Двоє гравців — Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один із них розрізає на $4n$ попарно різних за вагою шматочків (секторів). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за таким правилом. Спочатку Андрій вибирає один шматочок, потім Олеся вибирає два шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після її ходу,