Алгебра. 7–9 класи. Основні формули

Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \ge 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Квадратні рівняння

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{де } D = b^2 - 4ac.$$

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ — зведене квадратне рівняння.

Теорема Вієта. Якщо x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Властивості арифметичних квадратних коренів

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \ge 0,\ b \ge 0);$

2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \ge 0,\ b > 0);$

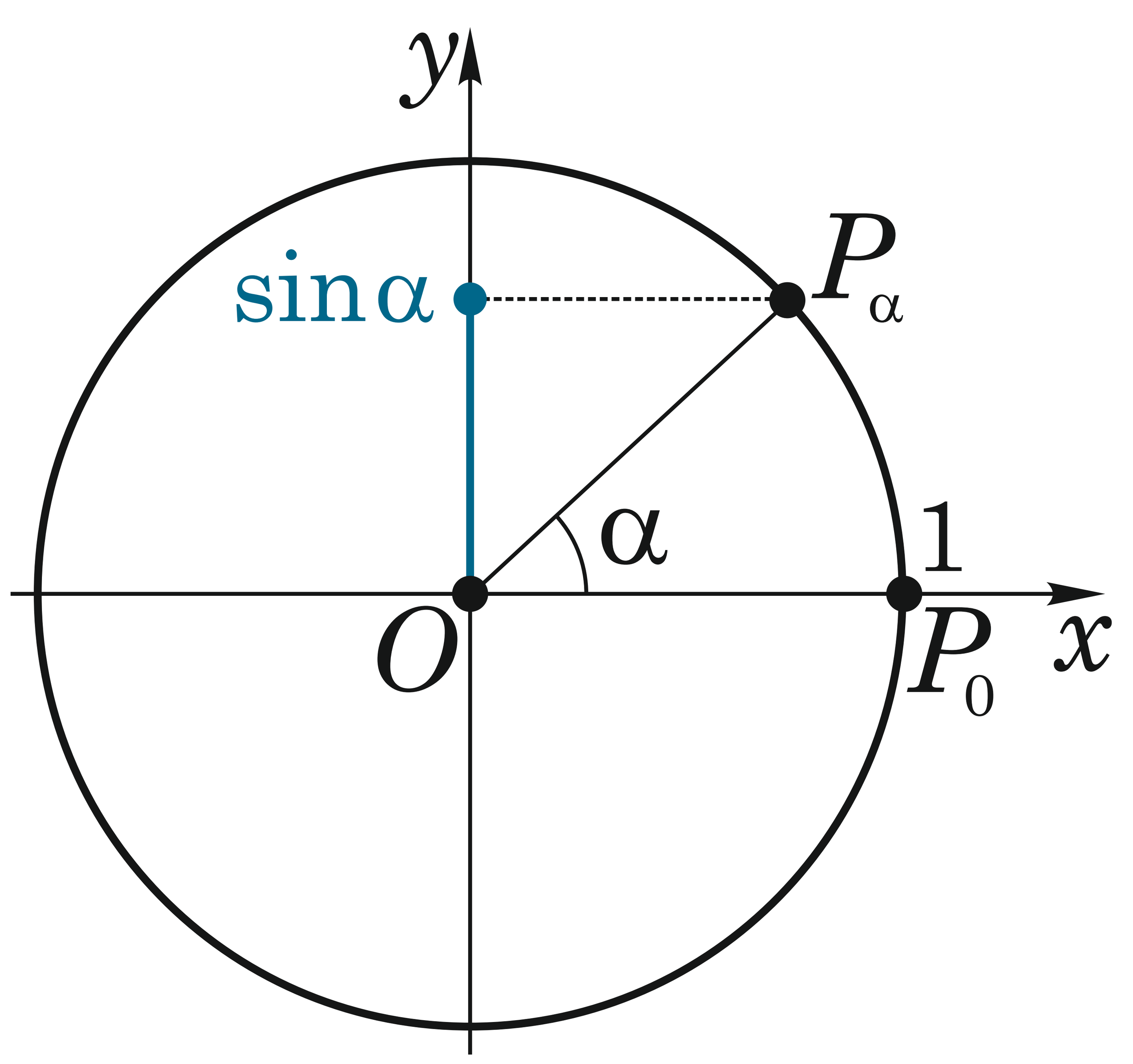
3. $\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k \quad (a > 0,\ k \in \mathbb{Z});$

4. $\sqrt{a^2} = |a|;$

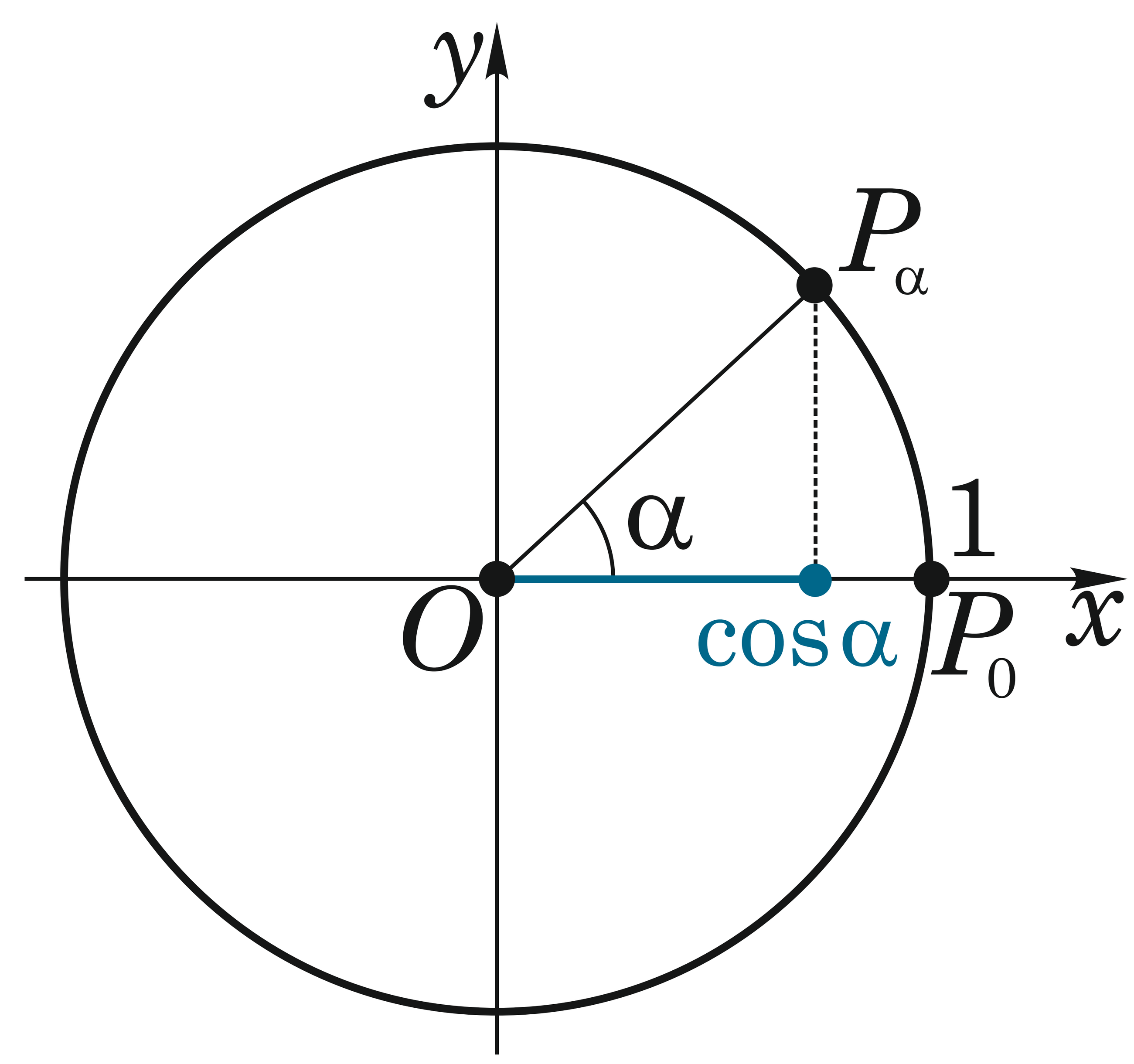
5. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \ge 0).$

Тригонометричні функції числового аргументу

Синус числа α — це **ордината** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 при повороті навколо центра кола на кут α рад.

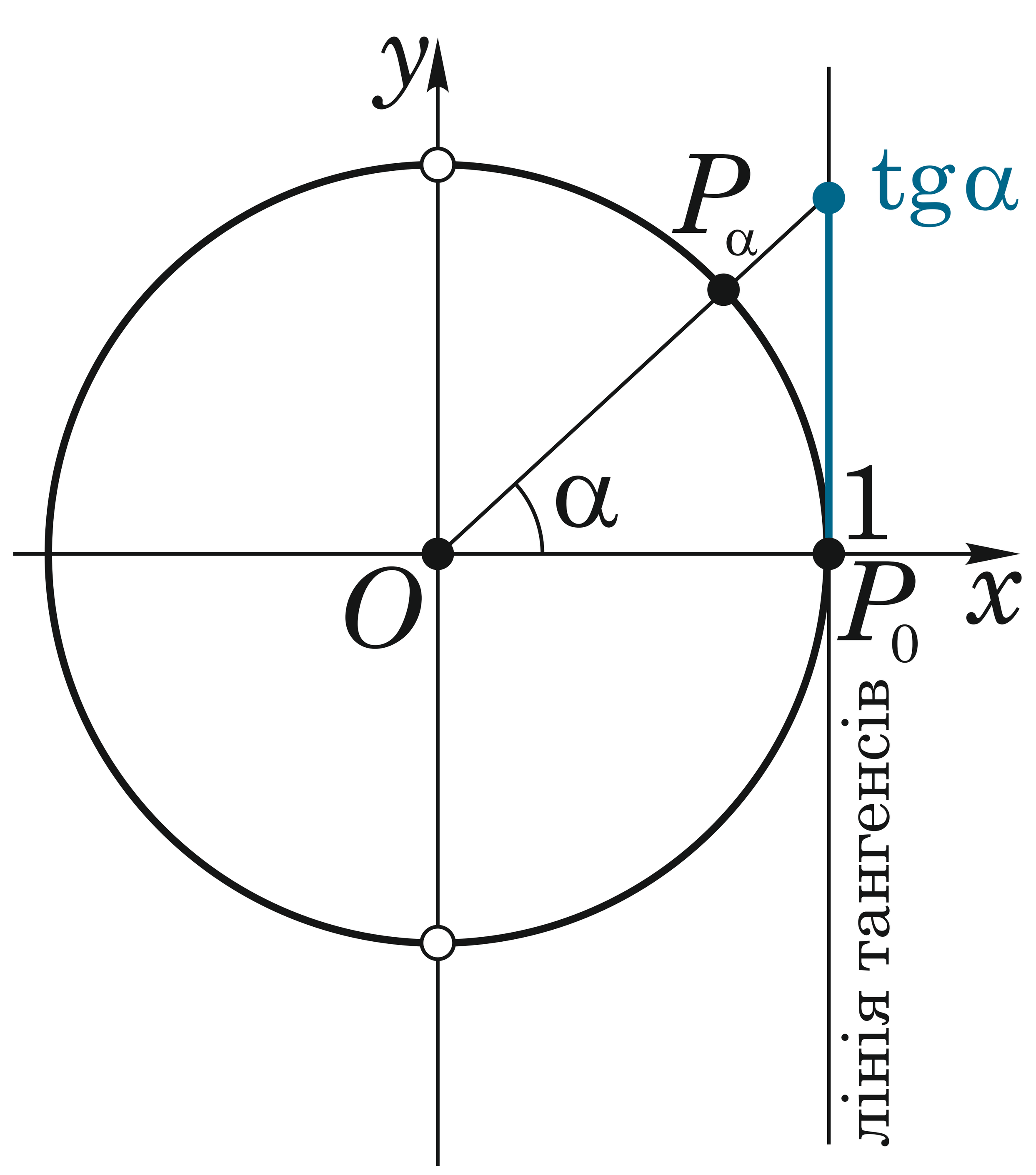


Косинус числа α — це **абсциса** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 при повороті навколо центра кола на кут α рад.



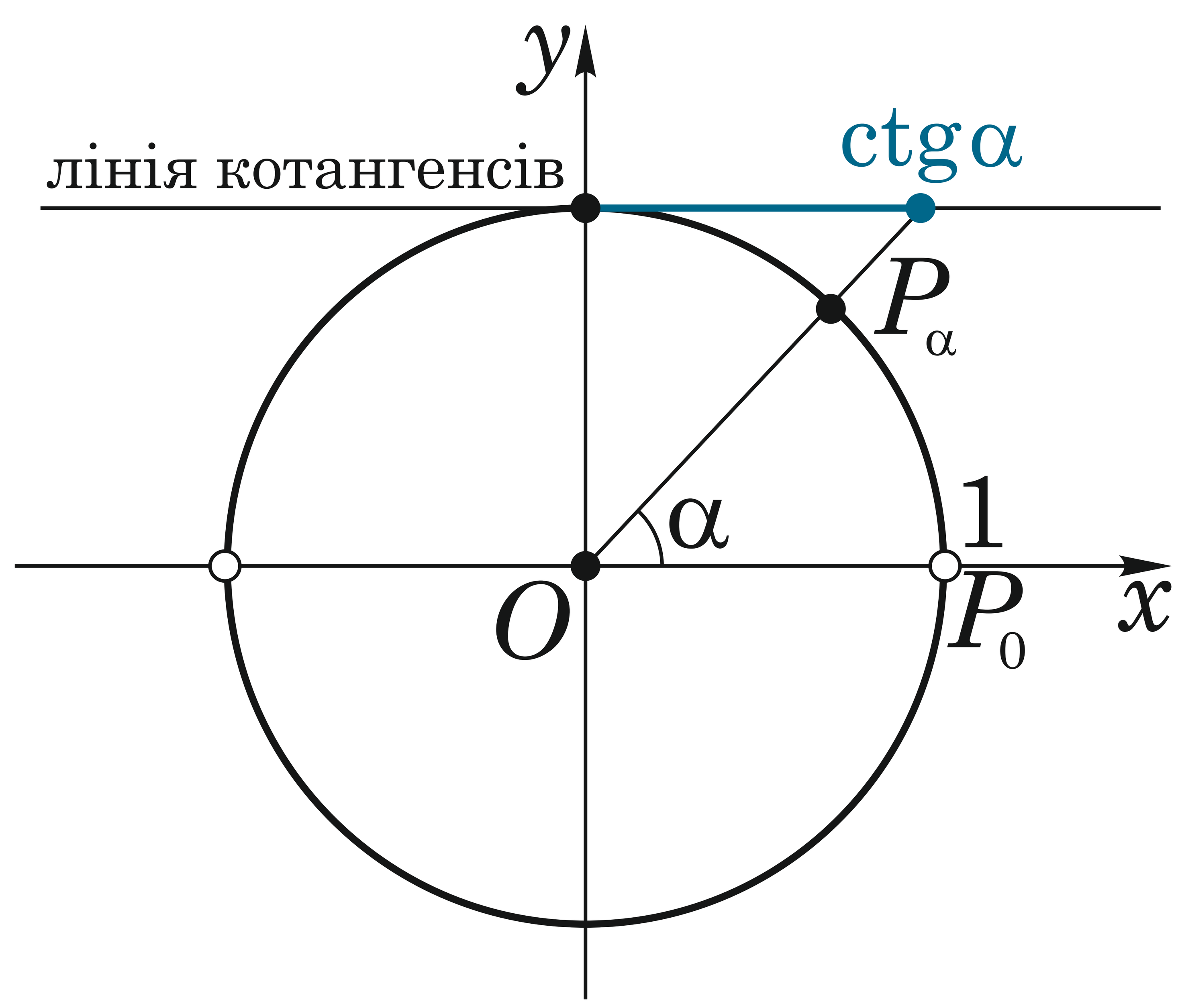
Тангенс числа α — це відношення синуса числа α до косинуса цього числа.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Котангенс числа α — це відношення косинуса числа α до синуса цього числа.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

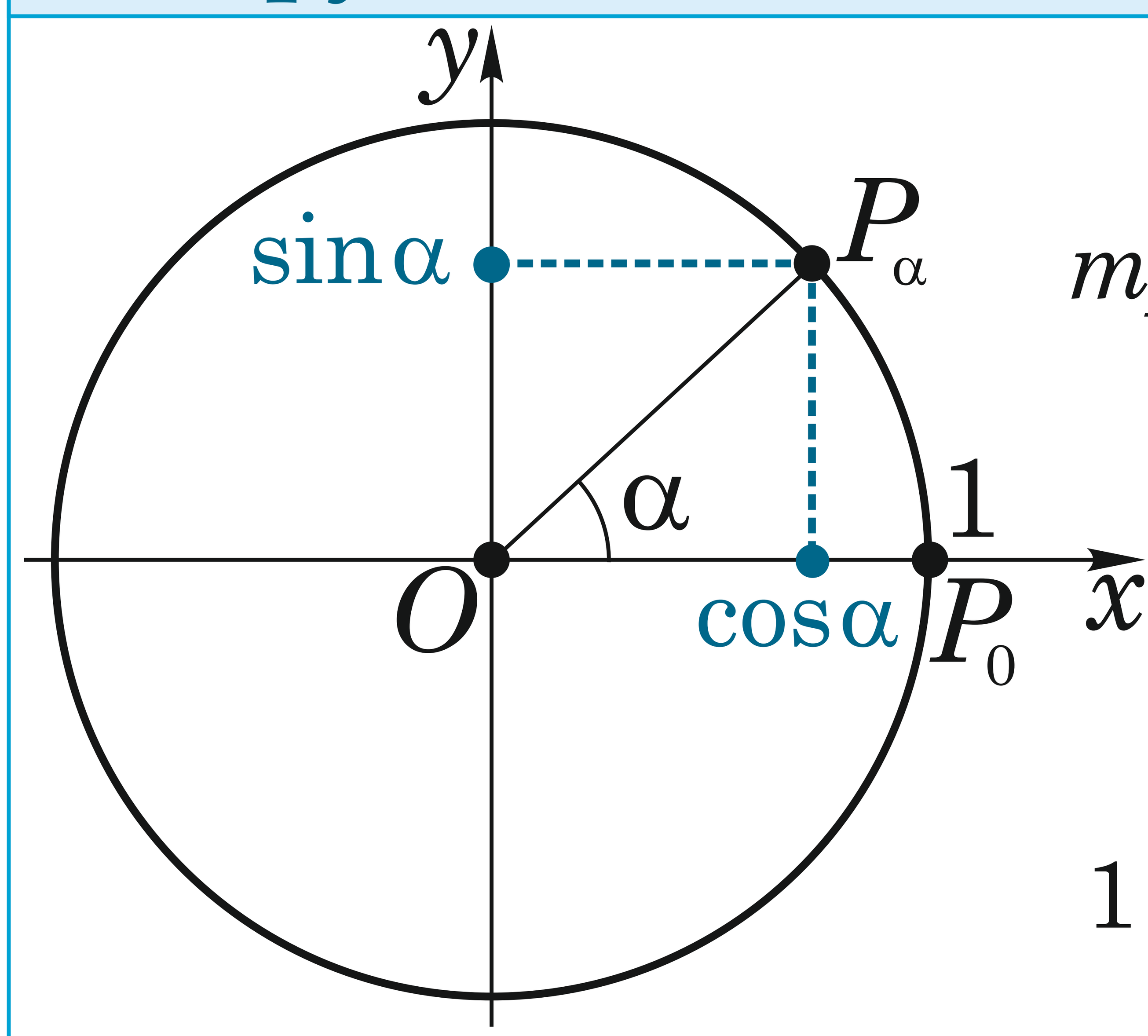


Значення тригонометричних функцій

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Основні формули тригонометрії (1)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — *основна тригонометрична тотожність*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Основні формули тригонометрії (2)

Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формули суми і різниці тригонометричних функцій

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формули зведення

Формули зведення — це формули, які виражають тригонометричні функції аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ через тригонометричні функції аргументу α.

Функція	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$
sin *x*	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos *x*	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg *x*	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg *x*	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Правило для запису формул зведення

1. Для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ функція, що зводиться, змінює назву на кофункцію (синус — на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки);

для кутів $\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ функція, що зводиться, не змінює назви.

2. Перед утвореною функцією ставиться той знак, який має функція, що зводиться, для гострого кута α.

Знаки тригонометричних функцій

Синус	Косинус	Тангенс і котангенс