ЗМІСТ

§ 1. Поняття границі функції в точці та неперервності функції

1. На мал. а) Функція неперервна в кожній із точок $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$, тому що при $x \to -1$, $f(-1) = -1$; при $x \to 1$, $f(1) = 2$; при $x \to 3$, $f(3) = 2{,}7$.
На мал. б) У точці $x = -1$ не є неперервною, тому що при $x \to -1$, $f(-1) = -3{,}4$ і одночасно $f(-1)$ не існує; в точках $x = 1$, $x = 3$ функція неперервна.
На мал. в) Функція неперервна в точках $x = -1$, $x = 3$; при $x \to 1$, $f(1)$ не існує.
На мал. г) Функція неперервна в точках $x = -1$, $x = 1$; при $x \to 3$, $f(3)$ не існує.

2. 1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in (-\infty; +\infty)$ неперервна в кожній точці проміжку як сума неперервних функцій $f_1(x) = x^2$ та $f_2(x) = -3x$.

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 1}$, $x \in (0; +\infty)$.

Область визначення $f(x)$: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, але $2 \in (0; +\infty)$, тому $f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $(0; +\infty)$, крім $x = 2$.

3) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $x \in [2; +\infty)$.

Область визначення $f(x)$: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $1 \notin [2; +\infty)$, тому $f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $[2; +\infty)$.

3. 1) $x \to 1$; $f(x) \to 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -3$; $f(x) \to -3$;

2) $x \to 2$; $f(x) \to \dfrac{2 \cdot 2 + 5}{2^3 - 7} = \dfrac{9}{1} = 9$; $f(x) \to 9$;

3) $x \to -1$; $f(x) \to \dfrac{1 - 1}{-1} = 0$; $f(x) \to 0$;

4) $x \to 3$; $f(x) \to \dfrac{6}{9 - 3} = 1$; $f(x) \to 1$.

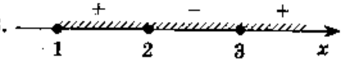
> У пунктах 3) і 4) при підстановці числа, до якого прямує x, у дробовий вираз маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, тоді цей дробовий вираз потрібно спростити, скориставшись формулами скороченого множення.

4. 1) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x + 5) = 4 + 2 + 5 = 11$;

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x}{4x + 1} = \dfrac{-1 - 2}{-4 + 1} = \dfrac{-3}{-3} = 1$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x + 3} = \dfrac{1}{6}$;

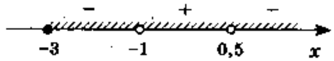
4) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x - 4)(x + 4)}{x + 4} = \lim\limits_{x \to -4}(x - 4) = -8$.

5. 1) Скористаємось методом інтервалів:
1. ОДЗ: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.
2. Нулі $f(x_0$: $(x^2 - 9)\left(\sqrt{x - 1} - 1\right) = 0$; $x = \pm 3$ та $x - 1 = 1$; $x = 2$, але $x = -3$ не входить до ОДЗ.
3. 

Відповідь: [2; 3].

2) 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x-1 \neq 0; \\ 2x+6 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0,5; \\ x \geq -3; \end{cases}$ $x \in [-3;\ 0,5) \cup (0,5;\ +\infty)$.

2. Нулі $f(x)$: $2-\sqrt{2x+6}=0$; $2x+6=4$; $2x=-2$; $x=-1$.

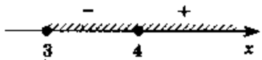
3. 

Відповідь: $(-1;\ 0,5)$.

3) 1. ОДЗ: $\begin{cases} x-3 \geq 0; \\ \sqrt{x-3}-1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3; \\ \sqrt{x-3} \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3; \\ x \neq 4; \end{cases}$ $x \in [3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

2. Нулі $f(x)$: $3x^2-2x-1=0$; $D_1=1+3=4$; $x_{1,2}=\frac{1 \pm 3}{3}$; $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{3}$.

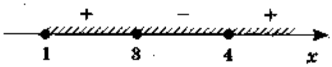
$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{3} \notin [3;\ 4) \cup 4;\ +\infty)$.

3. 

Відповідь: $[3;\ 4)$.

4) 1. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-16 \neq 0; \\ 2x-2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \pm 4; \\ x \geq 1; \end{cases}$ $x \in [1;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

2. Нулі $f(x)$: $\sqrt{2x-2}-2=0$; $2x-2=4$; $x=3$.

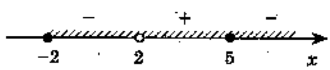
3. 

Відповідь: $[1;\ 3] \cup (4;\ +\infty)$.

$y=\sqrt[2n]{f(x)}$ має область визначення: $f(x) \geq 0$.

6. 1) $D(y)$: $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2-\sqrt{x+2}} \geq 0; \\ 2-\sqrt{+2} \neq 0; \\ x+2 \geq 0. \end{cases}$ $x \geq -2$; $x \neq 2$;

нулі $f(x)=\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x+2}}$, $x=5$.



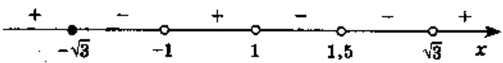
Відповідь: $D(y)$: $(2;\ 5]$.

2) $D(y)$: $\begin{cases} x-\sqrt{2x-1} \neq 0; \\ 2x-1 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2x-1} \neq x; \\ x \geq 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x+1 \neq 0; \\ x \geq 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 \neq 0; \\ x \geq 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 1; \\ x \geq 0,5. \end{cases}$

Відповідь: $D(y)$: $[0,5;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

3) $D(y)$: $(x^4-4x^2+3)|2x-3| \geq 0$; $x^4-4x^2+3=0$; $x^2=t$; $t^2-4t+3=0$;

$t_1=1$; $t_2=3$; $x^2=1$; $x=\pm 1$; $x^2=3$; $x=\pm\sqrt{3}$; $2x-3=0$, $x=1,5$.



Відповідь: $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right] \cup [-1;\ 1] \cup \left[\sqrt{3};\ +\infty\right)$.