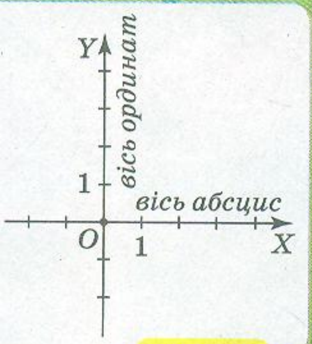
§ 1. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

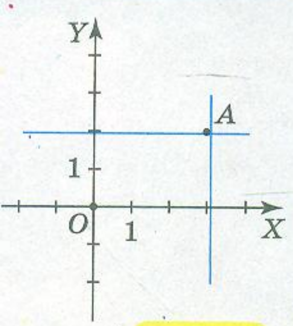


Мал. 1

1. ЯК ЗАДАЮТЬ ТОЧКИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

Із курсу алгебри ви знаєте, як увести *прямокутну декартову систему координат XOY* на площині (мал. 1). Площину з уведеною на ній системою координат називають *координатною площиною*.

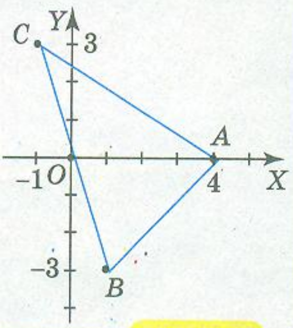
Кожній точці на координатній площині можна поставити у відповідність єдину пару чисел, узятих у певному порядку, і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини. Таку впорядковану пару чисел називають *координатами точки в даній системі координат*. Нагадаємо, щоб визначити координати точки, потрібно: через дану точку провести дві прямі, паралельні осям координат; на координатних осях відмітити числа, які відповідають точкам перетину цих прямих з осями; з одержаних чисел утворити впорядковану пару. На малюнку 2 точка A має координати: $A\ (3;\ 2)$.



Мал. 2

Задача 1. Дано три точки: $A\ (4;\ 0)$, $B\ (1;\ -3)$ і $C\ (-1;\ 3)$. Чи існує трикутник з вершинами в даних точках?

Розв'язання. Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо в ній дані точки за їхніми координатами (мал. 3). Очевидно, що точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.



Мал. 3

Щоб довести існування фігури, достатньо її побудувати.

2. ЯК ЗНАХОДЯТЬ ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

Під час розв'язування задачі з попереднього пункту у вас могло виникнути запитання: *Чи можна по-іншому обґрунтувати існування трикутника із заданими координатами вершин?* Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього потрібно знати, як знаходити відстань між двома точками за їхніми координатами.

ТЕОРЕМА **(про відстань між двома точками із заданими координатами).**

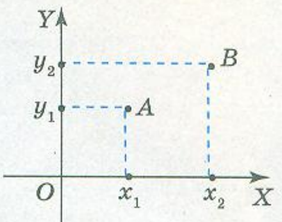
Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

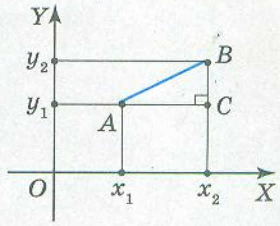
Дано: XOY — прямокутна декартова система координат $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$.

Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Доведення. Нехай точки A і B містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (мал. 4). З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат (мал. 5). Нехай C — точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC, у якому кут C — прямий, катет $AC = x_2 - x_1$, катет $BC = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню між точками A і B. За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Звідси $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Інші випадки розміщення точок A і B розгляньте самостійно.



Мал. 4



Мал. 5

? Чи залежить формула довжини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежить.

Задача 2. Відстань від початку координат O до точки $A\ (4;\ y)$ дорівнює 5 одиниць. Які координати має точка A?

Розв'язання. За умовою задачі, $OA = 5$, $O\ (0;\ 0)$, $A\ (4;\ y)$. За теоремою про відстань між двома точками, $OA = \sqrt{(4-0)^2 + (y-0)^2}$. Оскільки довжина відрізка є числом додатним, то, за властивістю арифметичного квадратного кореня, $OA^2 = (4-0)^2 + (y-0)^2$. Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$5^2 = (4-0)^2 + (y-0)^2,$$

$$25 = 16 + y^2,$$

$$y^2 = 9,$$

$$y = \pm 3.$$

Обидва корені задовольняють умову задачі, тому точка A має ординату або 3, або –3. Це означає, що на координатній площині існує дві точки, які є шуканими: $A_1\ (4;\ 3)$ і $A_2\ (4;\ -3)$.

Складаючи рівняння на основі формули відстані між точками $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$, можна відразу скористатися рівністю:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Дізнайтеся більше

1. Прямокутна декартова система координат названа на честь видатного французького вченого Рене Декарта (1596–1650), відомого значними досягненнями в галузі філософії, математики, фізики, фізіології. Математичні дослідження Декарта тісно пов'язані з його роботами з фізики й філософії. У «Геометрії» (1637) Декарт уперше ввів поняття змінної та функції, їх теперішнє позначення — малими латинськими буквами x, y. Установлений ним зв'язок між відрізками й числами зумовив взаємне проникнення геометрії та алгебри, зародження нового розділу математичної науки — *аналітичної геометрії*. Її методи використовують у багатьох галузях сучасних математичних досліджень.


Рене Декарт