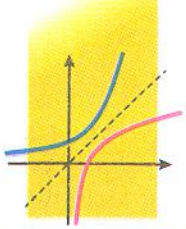
§1 ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником. Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

1. Показникова функція та її властивості

Розглянемо функцію $f(x) = 2^x$, де x — раціональне число, тобто областю визначення функції f є множина $\mathbb{Q}$.

На рисунку 1.1 позначено точки графіка функції f, які відповідають деяким цілим значенням x. Обчислимо значення функції $f(x) = 2^x$ при деяких дробових значеннях x. Наприклад, при $x = \frac{1}{2}$ маємо: $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1{,}41\ldots$. Якщо до точок, зображених на рисунку 1.1, додати точки графіка функції f, які відповідають, наприклад, значенням $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, то отримаємо множину точок, зображену на рисунку 1.2.

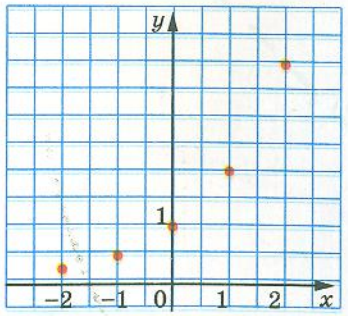


Рис. 1.1

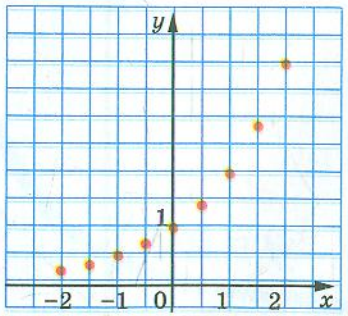


Рис. 1.2

Більш точне уявлення про графік функції f можна отримати, якщо позначити точки, які відповідають іншим раціональним значенням аргументу (рис. 1.3).

Виявляється, що існує тільки одна неперервна на $\mathbb{R}$ функція g, графік якої проходить через усі точки графіка функції f. Графік

функції g зображено на рисунку 1.4. Множина точок графіка функції f є підмножиною множини точок графіка функції g.

Функцію g називають **показниковою функцією** з основою 2 і записують: $g(x) = 2^x$.

Аналогічно можна розглядати показникову функцію з будь-якою основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$. Записують: $g(x) = a^x$.

Значення функції g у точці x називають **степенем додатного числа a з дійсним показником x** і позначають a^x.

Багато властивостей степеня з раціональним показником зберігаються і для степеня з дійсним показником.

Зокрема, для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y справедливі такі рівності:

1) $a^x a^y = a^{x+y}$;
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
3) $(a^x)^y = a^{xy}$;
4) $(ab)^x = a^x b^x$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Задача 1. Спростіть вираз $\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{2\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1. \blacktriangleleft$$

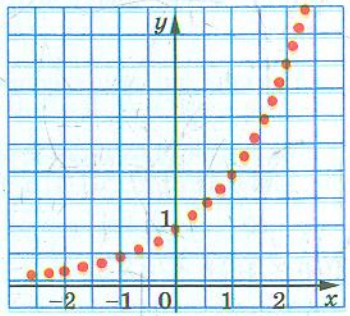


Рис. 1.3

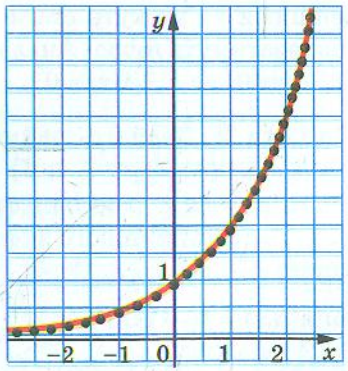


Рис. 1.4

Розглянемо властивості показникової функції $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

- *Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел*, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.
- *Областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$, тобто $E(f) = (0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *При* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою; при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.5 і 1.6 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

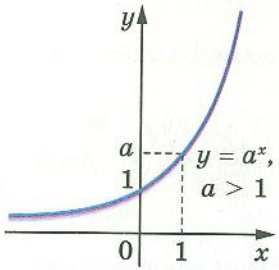


Рис. 1.5

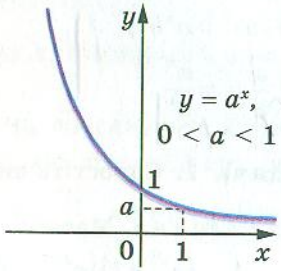


Рис. 1.6

Зазначимо важливу властивість графіка показникової функції $y = a^x$ зі збільшенням модуля x. Якщо $a > 1$ і $x < 0$, то відстані від точок графіка функції $y = a^x$ до осі абсцис стають усе меншими й меншими та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Аналогічну властивість має графік функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і $x > 0$.

Задача 2. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4; 3]$ (рис. 1.5), то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Які властивості має степінь з дійсним показником?
2. Сформулюйте властивості показникової функції.
3. Зобразіть схематично графік функції $y = a^x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$.

ВПРАВИ

1.1.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.2.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.3.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.4.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.5.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.6.° Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$; 3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ і $(\sqrt{2})^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ і $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ і 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.7.° Порівняйте із числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.8.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.9.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.• Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.11.• Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.12.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$.

1.13.• Спростіть вираз:

1) $\left(\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(a^{\pi}-b^{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$.

1.14.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

1.15.• Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1.16.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше дорівнює $\frac{1}{4}$?

1.17.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше дорівнює $\frac{1}{9}$?

1.18.• Знайдіть область значень функції:

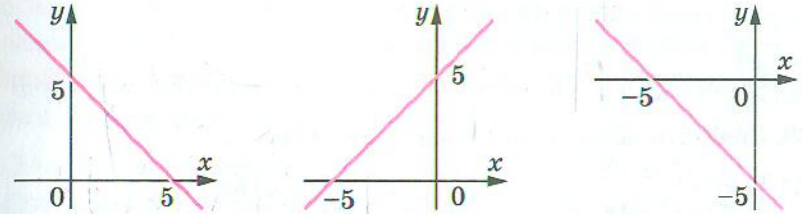
1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.19.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.20.• Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.21.•• Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.7, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



а *б* *в*

Рис. 1.7

1.22.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = \sin x$; 3) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.23.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.24.•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.25.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.26.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.27. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.28. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.29. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1}+7^x$;
2) $2^{x+1}+2^{x-4}$;
3) $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}$;
4) $2^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x}+36^{\frac{x}{2}}-6^{x+1}$;
6) $9^{x+1}+3^{2x+1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.30. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-8}$;
2) $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

1.31. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=12-4x-x^2$;
2) $f(x)=3+\sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x)=\cos x\ \mathrm{tg}\ x$.

ЧИ ПОТРІБНО ВИВЧАТИ ПОКАЗНИКОВУ ФУНКЦІЮ?

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Наприклад, біологам відомо, що маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t=0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t=1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t=2$, $t=3$, ..., $t=n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t)=a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t)=a^t$.

Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші на рахунок у банку під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Тому показникова функція описує і ці процеси.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x=8$,

$$3^x\cdot 3^{x-1}=4,$$

$$0{,}3^{x-4}=0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 2.1. ***При $a>0$ і $a\neq 1$ рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1=x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1=x_2$, то $a^{x_1}=a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1}=a^{x_2}$ випливає рівність $x_1=x_2$.

Припустимо, що $x_1\neq x_2$, тобто $x_1<x_2$ або $x_1>x_2$. Нехай, наприклад, $x_1<x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y=a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1<x_2$ випливає, що $a^{x_1}<a^{x_2}$ (при $a>1$) або $a^{x_1}>a^{x_2}$ (при $0<a<1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно, розглядаючи випадок, коли $x_1>x_2$, можна отримати суперечність. Отже, $x_1=x_2$. ◄

Наслідок. ***Якщо $a>0$ і $a\neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x)=g(x).$$

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $2^x=8$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо:

$$2^x=2^3.$$

Звідси $x=3$.

Відповідь: 3. ◄

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $3^{2x+1}+9^x=36$.

Розв'язання. Маємо: $3^{2x+1}+(3^2)^x=36$; $3^{2x+1}+3^{2x}=36$.

Винесемо множник 3^{2x} за дужки: $3^{2x}(3^1+1)=36$.

Далі отримуємо: $3^{2x}\cdot 4=36$; $3^{2x}=9$; $3^{2x}=3^2$; $2x=2$; $x=1$.

Відповідь: 1. ◄

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x=t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Звідси $t=1$ або $t=-5$.

Якщо $t=1$, то $5^x=1$. Звідси $5^x=5^0$; $x=0$.

Якщо $t=-5$, то $5^x=-5$. Оскільки $5^x>0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x=-5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◄

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $9\cdot 5^x=25\cdot 3^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^2\cdot 5^x=5^2\cdot 3^x$. Звідси $\frac{5^x}{3^x}=\frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^2$; $x=2$.

Відповідь: 2. ◄

?

1. Що можна сказати про числа x_1 і x_2, якщо виконується рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$, де $a>0$ і $a\neq 1$?
2. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, якщо $a>0$ і $a\neq 1$?

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x=64$;
2) $3^x=\frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3}=1$;
4) $10^{-x}=0{,}001$;
5) $2^{5-x}=2^{3x-7}$;
6) $8^x=16$;
7) $\sqrt{5^x}=25$;
8) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
9) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$;
10) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
11) $36^x=\left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
12) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$;
2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x=2\frac{2}{49}$;
4) $9^{-x}=27$;
5) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$;
7) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;
8) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;
9) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2}+3^x=30$;
2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$;
3) $2^{x+4}-2^x=120$;
4) $7^{x+1}+4\cdot 7^x=77$;
5) $5^x+7\cdot 5^{x-2}=160$;
6) $6^{x+1}-4\cdot 6^{x-1}=192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x=150$;
2) $2^x+2^{x-3}=18$;
3) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$;
4) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$;
2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$;
3) $25^x-5^x-20=0$;
4) $100\cdot 0{,}3^{2x}+91\cdot 0{,}3^x-9=0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x}-3\cdot 6^x-18=0$;
2) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0$.

2.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$;
2) $3^{x-1}=6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$;
3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;
4) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

2.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$;
2) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot 6^{2x+5}$;
3) $9\cdot 3^{\sin x}=\sqrt{27}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$;
2) $6\cdot 5^x-5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=10$;
3) $2\cdot 7^x+7^{x+2}-3\cdot 7^{x-1}=354$;
4) $4^{x-2}-3\cdot 2^{2x-1}+5\cdot 2^{2x}=228$.

2.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$;
2) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$;
3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;
4) $2\cdot 3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot 3^{2x}=36$.

2.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$;
2) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$;
3) $9^x-6\cdot 3^{x-1}=3$;
4) $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$.