

# § 1

## РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з дробами, чисельниками й знаменниками яких є вирази зі змінними; навчитеся додавати, віднімати, множити й ділити такі дроби; ознайомитеся з рівняннями, які складено за допомогою цих дробів.
- Ви дізнаєтеся, за якими правилами можна замінити дане рівняння на більш просте.
- Ви розширите свої уявлення про поняття «ступінь», навчитеся підносити числа до степеня із цілим від'ємним показником.
- Ви навчитеся будувати математичні моделі процесів, у яких збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів приводить до зменшення (збільшення) другої величини в таку саму кількість разів.

### 1. Раціональні дроби

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст п. 1 на с. 216 і п. 6 на с. 218.

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто вирази, що складені із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів:

$$x - y, \frac{a+b}{5}, m^2 + 2m + n^2, \frac{1}{3}x - 4, \frac{c}{4} + \frac{d}{7}, x : 5, y, 7.$$

У курсі алгебри 8 класу ми розглянемо **дробові вирази**.

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони містять ділення на вираз зі змінними.

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x + \frac{a}{b}, (x - y) : (x + y), \frac{\frac{a}{c}}{d}, \frac{5}{x}.$$

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль.

Наприклад, вираз  $2 + \frac{a+2}{a-1}$  при  $a = 1$  не має змісту, тобто числового значення цього виразу при  $a = 1$  не існує. При всіх інших значеннях  $a$  цей вираз має зміст.

**Означення.** Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.

Наприклад, у розглянутому вище виразі допустимими значеннями для змінної  $a$  є всі числа, крім 1.

Допустимими значеннями змінних, які входять до цілого виразу, є всі числа.

Окремим видом раціонального виразу є **раціональний дріб**. Це дріб, чисельником і знаменником якого є многочлени<sup>1</sup>. Так, раціональні вирази

$$\frac{x}{7}, \frac{x^2 - 2xy}{x + y}, \frac{12}{a}, \frac{a + b}{5}$$

є прикладами раціональних дробів.

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменник раціонального дробу не може бути нульовим многочленом, тобто многочленом, який тотожно дорівнює нулю.

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального дробу, є всі значення змінних, при яких значення знаменника дробу не дорівнює нулю.

Схема на рисунку 1 ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.



Рис. 1

<sup>1</sup> Нагадаємо, що числа й одночлени вважають окремими випадками многочленів (див. п. 6 на с. 218).





$$7) \frac{5}{x^2-4}; \quad 9) \frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}; \quad 11) \frac{x}{|x|+1};$$

$$8) \frac{5}{|x|-4}; \quad 10) \frac{x+4}{x(x-6)}; \quad 12) \frac{x^2}{(x-3)(x+5)}.$$

6. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \frac{9}{y}; \quad 3) \frac{m-1}{m^2-9}; \quad 5) \frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1};$$

$$2) \frac{x+7}{x+9}; \quad 4) \frac{x}{|x|-3}; \quad 6) \frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}?$$

7. Запишіть раціональний дріб, який містить змінну  $x$  і має зміст при всіх значеннях  $x$ , крім:

$$1) x = 7; \quad 2) x = -1; \quad 3) x = 0 \text{ і } x = 4.$$

8. Запишіть раціональний дріб, який містить змінну  $y$ , допустимими значеннями якої є:

$$1) \text{ усі числа, крім } 5; \quad 3) \text{ усі числа, крім } 3, -3 \text{ і } 6;$$

$$2) \text{ усі числа, крім } -2 \text{ і } 0; \quad 4) \text{ усі числа.}$$

9. Автомобіль проїхав по шосе  $a$  км зі швидкістю 75 км/год і по ґрунтовій дорозі  $b$  км зі швидкістю 40 км/год. За який час автомобіль проїхав увесь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення при  $a = 150$ ,  $b = 20$ .

10. Учень придбав зошити по 8 грн, заплативши за них  $m$  грн, і по 14 грн, заплативши за них  $n$  грн. Скільки зошитів придбав учень? Складіть вираз і знайдіть його значення при  $m = 24$ ,  $n = 56$ .

11. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної  $x$  значення дробу:

$$1) \frac{1}{x^2} \text{ додатне}; \quad 2) \frac{x^2+1}{6x-9-x^2} \text{ від'ємне.}$$

12. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної  $x$  значення дробу:

$$1) \frac{-x^2}{x^2+5} \text{ недодатне}; \quad 2) \frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1} \text{ невід'ємне.}$$

13. Відомо, що  $5x - 15y = 1$ . Знайдіть значення виразу:

$$1) x - 3y; \quad 3) \frac{18y-6x}{9};$$

$$2) \frac{8}{2x-6y}; \quad 4) \frac{1}{x^2-6xy+9y^2}.$$

14. Відомо, що  $4a + 8b = 10$ . Знайдіть значення виразу:

$$1) 2b + a; \quad 2) \frac{5}{a+2b}; \quad 3) \frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}.$$