розв'язування деяких завдань вступних іспитів та зовнішнього оцінювання з математики у рубриці посібника *«Для допитливих»*.

Наприкінці видання міститься довідковий матеріал із курсу математики 5–6 класів та алгебри 7 класу, поданий у вигляді конспектів.

Бажаю успіхів!

Автор

ТЕМА 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Конспект 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби. Основна властивість раціонального дробу

Означення або правила	Приклади
Раціональним виразом називають вираз, що складається з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня	$(a+2c)^3$; $\left(\frac{a}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{b}+c\right)$ — раціональні вирази
Цілим виразом називають раціональний вираз, що не містить ділення на вираз із змінною. **Дробом** називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски	$2x^2+x$, $\frac{2}{3}(a-5)$ — цілі раціональні вирази. $x+\frac{5}{a+2}$ — дробовий раціональний вираз
Допустимими значеннями змінних у виразі називають такі значення змінних, за яких вираз має числове значення (тобто при допустимих значеннях змінних можна виконати всі дії, записані у виразі)	1) Для виразу $\left(a^2+b^2\right)^3+1$ усі значення a і b є допустимими. 2) Для виразу $\frac{x+5}{x}$ допустимими є всі значення $x\neq 0$ (якщо $x=0$, то $\frac{x+5}{x}=\frac{5}{0}$ — не є числом, оскільки на 0 ділити не можна)

Означення або правила	Приклади
Множину всіх допустимих значень змінних із даного виразу називають **областю допустимих значень виразу (ОДЗ)**	ОДЗ для виразу x^{-2}: $x \neq 0$, оскільки при $x = 0$ $x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$ — не є числом (на 0 ділити на можна)
Для змінних у знаменнику дробу допустимими є тільки ті значення, за яких цей знаменник не дорівнює нулю	1) ОДЗ для виразу $\frac{b}{a}$: $a \neq 0$. 2) ОДЗ для виразу $\frac{\frac{1}{x}+2}{x-3}$: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x-3 \neq 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 3 \end{cases}$
Щоб знайти допустимі значення змінних у раціональному дробі, треба: 1) прирівняти знаменники дробів до нуля; 2) знайти розв'язки одержаних рівнянь; 3) з усіх чисел виключити одержані розв'язки	Щоб знайти допустимі значення x у виразі $\frac{2x}{x^2-4x}$, з'ясовуємо, коли $x^2 - 4x = 0$; $x(x-4) = 0$. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю: $x = 0$ або $x - 4 = 0$; $x = 0$ або $x = 4$. Допустимими значеннями x є всі числа, крім 0 і 4. *Відповідь*. ОДЗ: $x \neq 0$ і $x \neq 4$
Тотожними називають вирази, відповідні числові значення яких є рівними при всіх допустимих значеннях змінних	Вирази $\frac{x^5}{x}$ і x^4 — тотожно рівні, оскільки для всіх $x \neq 0$ (ОДЗ виразу $\frac{x^5}{x}$) значення виразів $\frac{x^5}{x}$ і x^4 є рівними

Основна властивість раціонального дробу

Властивість	Приклади
Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз (що не дорівнює нулю на ОДЗ цього дробу), то одержимо дріб, тотожно рівний даному	$\frac{x(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{x}{(x-1)^2}$; $\frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{x(x^2+2)}$
Скорочення дробів	
Скоротити дріб — означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний дільник (який на ОДЗ цього дробу не дорівнює нулю)	$\frac{x^5}{x^2(x+3)} = \frac{x^3}{x+3}$
Для того щоб скоротити дріб, треба: 1) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; 2) знайти спільний множник для чисельника і знаменника дробу; 3) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник	Скоротіть дріб $\frac{a^3-9a}{a^4-3a^3}$. 1) Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники (винесемо за дужки спільні множники, у чисельнику розкладаємо на множники різницю квадратів): $\frac{a(a^2-9)}{a^3(a-3)} = \frac{a(a-3)(a+3)}{a^3(a-3)}$; 2) знайдемо спільний множник для чисельника і знаменника — це $a(a-3)$; 3) розділимо чисельник і знаменник дробу на $a(a-3)$, одержимо дріб $\frac{a+3}{a^2}$

Конспект 2.

Арифметичні дії з раціональними дробами

Правило	Приклад
1. Додавання і віднімання дробів	
Якщо знаменники дробів рівні, то чисельники додають (віднімають), а знаменник залишається тим самим (якщо надалі одержаний дріб можна скоротити, то його скорочують)	$\frac{x^2-x-3}{x-1}+\frac{x+2}{x-1}=$ $=\frac{x^2-x-3+x+2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=$ $=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$
Якщо знаменники дробів різні, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім додають (віднімають) як дроби з рівними знаменниками	$\frac{3}{a+2}-\frac{5}{a-2}=\frac{3(a-2)}{(a+2)(a-2)}-$ $-\frac{5(a+2)}{(a+2)(a-2)}=$ $=\frac{3a-6-(5a+10)}{(a+2)(a-2)}=$ $=\frac{3a-6-5a-10}{(a+2)(a-2)}=\frac{-2a-16}{a^2-4}$
2. Множення дробів	
Під час множення дробів у чисельнику записують добуток чисельників, а в знаменнику — добуток знаменників (якщо надалі одержаний дріб можна скоротити, то його скорочують)	$\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{(x^2-1)\cdot x}{x^2\cdot(x-1)}=$ $=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x}$

Правило	Приклад
Під час множення дробу на цілий вираз у чисельнику записують добуток чисельника на цей вираз, а знаменник залишають тим самим (цілий вираз також можна подати як дріб із знаменником 1)	$\frac{a}{a+2}\cdot(a^2-4)=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{1}=$ $=\frac{a(a^2-4)}{a+2}=\frac{a(a-2)(a+2)}{a+2}=$ $=a(a-2)=a^2-2a$
3. Ділення дробів	
Під час ділення дробів перший дріб множать на дріб, обернений до другого	$\frac{a^2+3a}{a+1}:\frac{a+3}{a+1}=\frac{a^2+3a}{a+1}\cdot\frac{a+1}{a+3}=$ $=\frac{a(a+3)(a+1)}{(a+1)(a+3)}=a$
Під час піднесення дробу до степеня підносять до цього степеня окремо чисельник і знаменник і записують дріб, у якого чисельник є степенем чисельника, а знаменник — степенем знаменника	$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^7=\frac{(a^2)^7}{(b^3)^7}=\frac{a^{14}}{b^{21}}$
Перед множенням або діленням алгебраїчних дробів зручно (якщо це можливо) розкласти чисельники і знаменники дробів на множники	*Див. приклади в пунктах 2 і 3 вище.*