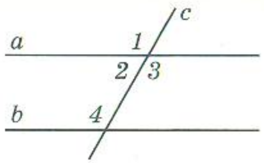
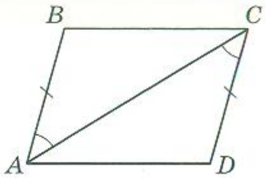


Мал. 14



Мал. 15

31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 14), якщо:

1) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$;
2) $\angle 1 > \angle 4$;
3) $\angle 3 = 120°$; $\angle 4 = 121°$;
4) $\angle 2 = 60°$; $\angle 4 = 119°$;
5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$;
6) $\angle 3 = \angle 4$?

32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 15), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Чи паралельні прямі BC і AD?

Життєва математика

33. Восьмикласники Ярослав і Марина ведуть здоровий спосіб життя. Кілька разів на тиждень вони пробігають по доріжці навколо парку, який має форму прямокутника зі сторонами 150 і 200 м. Хлопець пробігає доріжкою 4 рази, а дівчина – тричі. Швидкість бігу Ярослава – 16 км/год, Марини – 14 км/год. Хто витрачає більше часу на тренування та на скільки? Відповідь дайте з точністю до секунди.

Цікаві задачі для учнів неледачих

34. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.*) Знайдіть найбільше значення n, для якого n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

§2. ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

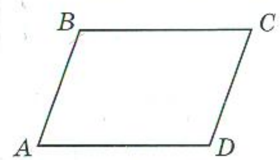
Паралелограмом **називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.**

На малюнку 16 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Розглянемо *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

Справді, наприклад, кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 16) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB. Тому $\angle A + \angle B = 180°$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.



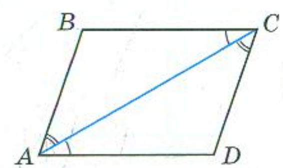
Мал. 16

2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Тому паралелограм – опуклий чотирикутник.

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

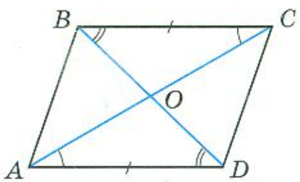
Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 17). Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC. AC – спільна сторона цих трикутників й $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC, AB і CD відповідно). Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників). Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ▲



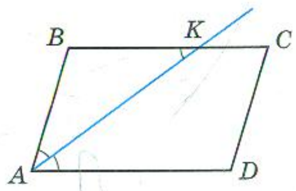
Мал. 17

4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 18). $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно). Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ▲



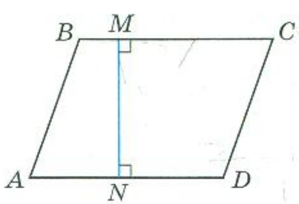
Мал. 18



Мал. 19

Задача 1. Дано: $ABCD$ паралелограм, AK – бісектриса кута A, $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 19). Знайдіть: P_{ABCD}.
Розв'язання. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см).
2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK).
3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см).
4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).
Відповідь. 26 см.

Висотою паралелограма **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.**



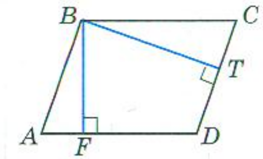
Мал. 20

На малюнку 20 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти. Наприклад, на малюнку 21 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD.

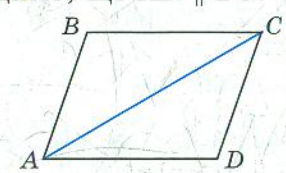
Розглянемо *ознаки паралелограма.*

Т Теорема (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.**

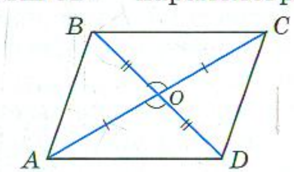


Мал. 21

Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 22). Проведемо діагональ AC. Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC – спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами й кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC. Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ – паралелограм.
2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 22). Проведемо діагональ AC. Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 22



Мал. 23

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 23). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами та кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2 цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ – паралелограм.
4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 16). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$, $2(\angle A + \angle B) = 360°$; $\angle A + \angle B = 180°$. Але $\angle A$ і $\angle B$ – внутрішні односторонні