§1 Раціональні вирази. Види раціональних виразів

1. ВИДИ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ. ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМИХ ЗНАЧЕНЬ ЗМІННОЇ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, що таке *вираз зі змінними* та які з них відносять до *раціональних виразів*. Пригадайте відповідне означення та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Вираз зі змінними **називається *раціональним*, якщо він містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з цілим показником.**

Наприклад, раціональними є вирази:

$$\frac{2}{7}x, \quad (2+a):(10-4), \quad \frac{c-3}{24+c}, \quad 2(x+y)^4:12y.$$

? Чи всі вирази зі змінними є раціональними? Ні. Існують ще й *ірраціональні вирази*. Вони, крім відомих вам дій, містять деякі інші дії. Про них ви дізнаєтеся пізніше.

Кожний із наведених раціональних виразів містить дію ділення. Проте у виразах $\frac{2}{7}x$ і $(2+a):(10-4)$ ділення здійснюється лише на число або на числовий вираз, а у виразах $\frac{c-3}{2c+4}$ і $2(x+y)^4:12y$ — на вираз зі змінною. Перші два вирази вважають *цілими*, а інші два — *дробовими*.

Раціональний вираз **є *цілим*, якщо він не містить ділення на вираз зі змінною.**

Раціональний вираз **є *дробовим*, якщо він містить ділення на вираз зі змінною.**

Ви вже знаєте, що змінні в раціональному виразі можна замінити числами (*значеннями змінних*). Тоді раціональний вираз перетвориться на числовий. Значення цього числового виразу називають *значенням* раціонального *виразу* для заданих значень змінних. Наприклад:

якщо $a = 4$, то $(2 + a) : (10 - 4) = (2 + 4) : 6 = 1$;

якщо $a = -8$, то $(2 + a) : (10 - 4) = (2 + (-8)) : 6 = -1$.

Отже, для $a = 4$ даний вираз набуває значення 1, а для $a = -8$ — значення -1.

Чи завжди можна знайти значення раціонального виразу? Ні. Поміркуємо.

Наприклад, підставимо у вираз $2(x + y)^4 : 12y$ значення $y = 0$. Одержимо, що $12y = 0$, тобто дільник виразу дорівнює нулю. Це означає, що за такого значення змінної даний *вираз втрачає зміст*, бо на нуль ділити не можна. Отже, для даного виразу число 0 є *недопустимим значенням змінної*. Будь-яке інше число не перетворює на нуль дільник цього виразу і тому є *допустимим значенням змінної* для нього. Отже, даний вираз має зміст лише тоді, коли $y \neq 0$.

Аналогічно, для виразу $\frac{c-3}{2c+4}$ значення $c = -2$ є недопустимим, бо за такого значення змінної його знаменник дорівнює нулю і вираз $\frac{c-3}{2c+4}$ втрачає зміст. Отже, даний вираз має зміст для будь-якого значення c, крім -2.

Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень змінної* цього виразу.

Коротко це записують так.

ОДЗ: c — будь-яке число, крім -2, або $c \neq -2$.

Зверніть увагу:

- якщо раціональний вираз містить більш як одну змінну, то ОДЗ вказують для кожної змінної;
- для цілого виразу ОДЗ кожної змінної містить усі числа;
- для дробового виразу ОДЗ кожної змінної може містити не всі числа.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДРОБОВОГО ВИРАЗУ

Ви вже знаєте, що значення раціонального виразу залежить від значень його змінних. У 7-му класі ви навчились обчислювати значення цілих виразів. Знаходження значень дробових виразів має свої особливості.

Задача. Знайдіть значення виразу $\frac{x+y}{x-1}$ для всіх цілих значень змінних від –0,5 до 1,5.

Розв'язання. Даний вираз є дробовим виразом, отже, треба визначати ОДЗ кожної із двох його змінних: x і y. Щоб знайти недопустимі значення змінних, прирівняємо знаменник даного виразу до нуля: $x - 1 = 0$, звідси $x = 1$. Отже, число 1 — недопустиме значення змінної x. Змінна y не входить до знаменника даного виразу, тому вона може набувати будь-яких значень. Одержали:

ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1; y — будь-яке число.

За умовою, кожна зі змінних x і y може набувати цілих значень від –0,5 до 1,5, тобто дорівнювати або числу 0, або числу 1. Але для змінної x значення 1 є недопустимим, тому його не можна використовувати в обчисленнях.

Щоб знайти значення даного виразу, треба утворити різні пари значень змінних x і y, де для x використати лише число 0, а для y — два числа: 0 і 1.

Для впорядкування обчислень можна скласти таблицю 1.

Таблиця 1

Вираз	Допустимі значення змінних		Підстановка значень змінних та обчислення	Значення виразу
	x	y		
$\frac{x+y}{x-1}$	0	0	$\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$	0
	0	1	$\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$	–1

Коротко розв'язання задачі можна записати так:

ОДЗ: x — будь-яке число, крім 1; y — будь-яке число.

Якщо $x = 0$ і $y = 0$, то $\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$.

Якщо $x = 0$ і $y = 1$, то $\frac{0+1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1$.

Відповідь: 0, якщо $x = 0$ і $y = 0$; –1, якщо $x = 0$ і $y = 1$.

Зверніть увагу:
щоб обчислити значення раціонального виразу для деяких значень змінних, потрібно:

1) визначити ОДЗ кожної змінної виразу;

2) підставити у вираз набори з допустимих значень змінних, перебравши всі можливі варіанти їх комбінування;

3) обчислити значення кожного з одержаних числових виразів.

3. ТОТОЖНО РІВНІ ВИРАЗИ

Із курсу алгебри 7-го класу ви знаєте, що два цілі вирази можуть бути *тотожно рівними*. Наприклад, вирази $3a - a$ і $2a$, $6a : 2$ і $3a$ є тотожно рівними, оскільки вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їхніх змінних. Заміна виразу тотожно рівним йому виразом — це *тотожне перетворення виразу*. Наприклад, $3a - a = 2a$, $6a : 2 = 3a$.

До дробових раціональних виразів також можна застосовувати тотожні перетворення. Але тут є свої обмеження, оскільки дробові вирази можуть втрачати зміст за деяких значень їхніх змінних. Наприклад, дробовий вираз $8a^2 : 4a$ втрачає зміст, якщо $a = 0$. Тому виконувати будь-які перетворення цього виразу можна лише за умови: $a \neq 0$.

? Чи є тотожно рівними вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$? Поміркуємо.

ОДЗ змінної виразу $8a^2 : 4a$ — будь-яке число, крім нуля. ОДЗ змінної виразу $2a$ містить усі числа, тому цей вираз має зміст і на ОДЗ змінної першого виразу. Загалом, обидва вирази одночасно мають зміст лише тоді, коли $a \neq 0$. Це означає, що вираз $8a^2 : 4a$ можна замінити виразом $2a$, якщо $a \neq 0$, тобто на спільній ОДЗ їхніх змінних. Отже, вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$ є *тотожно рівними на спільній ОДЗ їхніх змінних*.

Звідси випливає, що заміна виразу $8a^2 : 4a$ виразом $2a$, якщо $a \neq 0$, є тотожним перетворенням даного дробового виразу.

Зверніть увагу:
дробові раціональні вирази можна тотожно перетворювати лише на ОДЗ їхніх змінних.

Оскільки знаходження ОДЗ змінних дробових виразів є окремою задачею й не завжди простою, то надалі будемо опускати цей крок і вважатимемо, що **всі тотожні перетворення дробових раціональних виразів виконуються на ОДЗ їхніх змінних.**