1. Призма

На рисунку 1.1 зображено знайомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

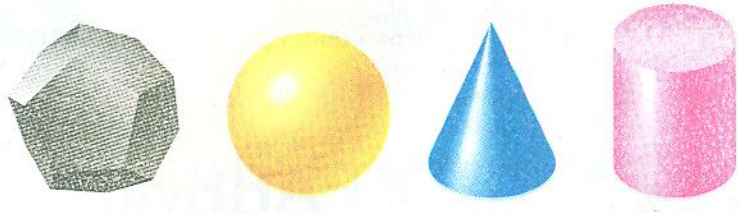
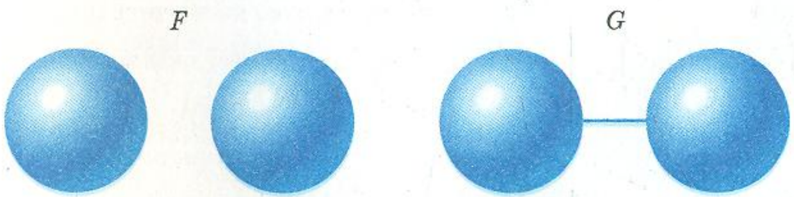


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур F і G, які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 53–59.



Фігура F — об'єднання двох куль

Фігура G — об'єднання двох куль і відрізка

Рис. 1.2

Означення. Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** M. Наприклад, на рисунку 1.3 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A.

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 1.4).

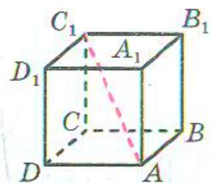


Рис. 1.3

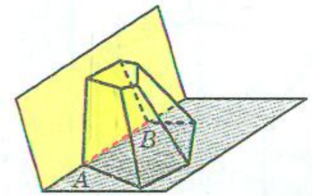


Рис. 1.4

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок AC_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

Означення. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.5 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Однак навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.6).

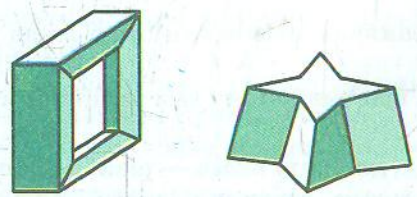


Рис. 1.5

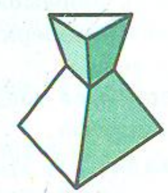
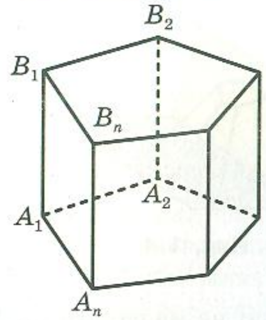
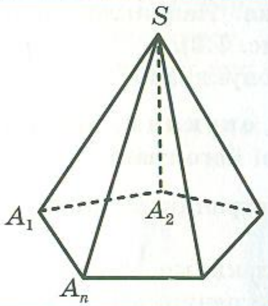


Рис. 1.6

Було підмічено, що кількості вершин ***В***, ребер ***Р*** і граней ***Г*** опуклих многогранників підпорядковуються дивовижній закономірності:

$$В - Р + Г = 2. \qquad (1)$$

Справді, розглянемо відомі вам опуклі многогранники та підрахуємо кількості їхніх вершин, ребер і граней. Маємо:

Многогранник	Кількість вершин, ***В***	Кількість ребер, ***Р***	Кількість граней, ***Г***	***В − Р + Г***
	$2n$	$3n$	$n+2$	2
	$n+1$	$2n$	$n+1$	2

У 1750 р. видатний математик, академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер довів, що рівність (1) виконується для довільного опуклого многогранника. З того часу це твердження називають теоремою Ейлера.

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Зупинимося докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. **Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.**

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.7).

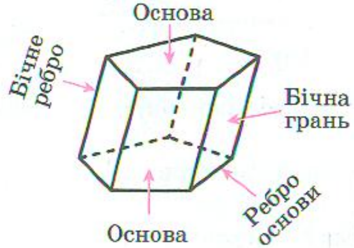


Рис. 1.7

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.8). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

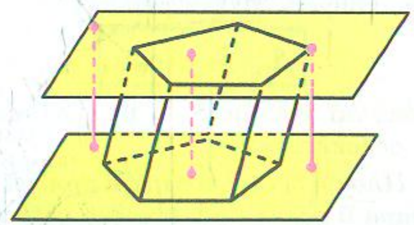


Рис. 1.8

Означення. **Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.**

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. **Призму називають *правильною*, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.**

Задача 2. Трикутник ABC, у якому $AB = 2\sqrt{19}$ см, $BC = 2$ см, $AC = 8$ см, є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.13). Знайдіть кут між прямими CB_1 і AC_1, якщо висота призми дорівнює 4 см.

Розв'язання. Перший спосіб. Розмістимо поруч з даною трикутною призмою рівну їй призму $ABDA_1B_1D_1$ так, щоб утворилася пряма чотирикутна призма, основа якої — паралелограм (рис. 1.14). Оскільки $AD = B_1C_1$ і $AD \parallel B_1C_1$, то чотирикутник ADB_1C_1 — паралелограм. Звідси $AC_1 \parallel DB_1$. Отже, кут між прямими CB_1 і AC_1 дорівнює куту між прямими CB_1 і DB_1.

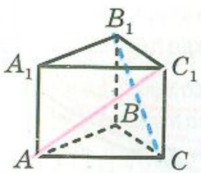


Рис. 1.13

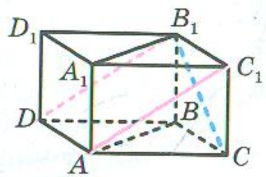


Рис. 1.14

За теоремою про властивість сторін і діагоналей паралелограма можна записати: $AB^2 + DC^2 = 2BC^2 + 2AC^2$.

Звідси $76 + DC^2 = 8 + 128$; $DC^2 = 60$.

Із трикутника DBB_1 маємо: $DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2 = 64 + 16 = 80$.

Із трикутника CBB_1 маємо: $CB_1^2 = CB^2 + BB_1^2 = 4 + 16 = 20$.

До трикутника DB_1C застосуємо теорему косинусів: $DC^2 = DB_1^2 + CB_1^2 - 2DB_1 \cdot CB_1 \cos \angle DB_1C$.

Отримуємо: $60 = 80 + 20 - 2\sqrt{80}\sqrt{20} \cos \angle DB_1C$.

Звідси $\cos \angle DB_1C = \frac{1}{2}$. Таким чином, шуканий кут дорівнює 60°.

Другий спосіб. «Поставимо» на дану призму рівну їй призму $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ (рис. 1.15). Оскільки $CB_1 \parallel C_1B_2$, то шуканий кут дорівнює куту між прямими C_1A і C_1B_2. Знайшовши сторони трикутника AC_1B_2, можна знайти косинус кута AC_1B_2. Завершіть розв'язання самостійно. ◄

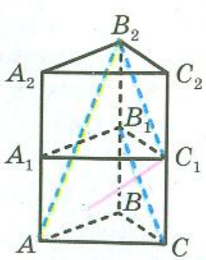


Рис. 1.15

Ви не раз бачили моделі многогранників, виготовлених із різних матеріалів — паперу, картону, фанери, пластмаси тощо (рис. 1.16).

Якщо таку модель розрізати по деяких ребрах і розгорнути на площину так, щоб утворилася модель многокутника, то цей многокутник називають **розгорткою многогранника**.

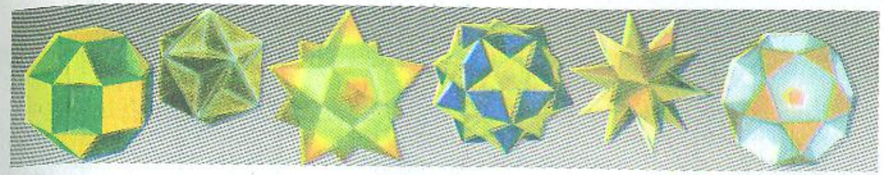
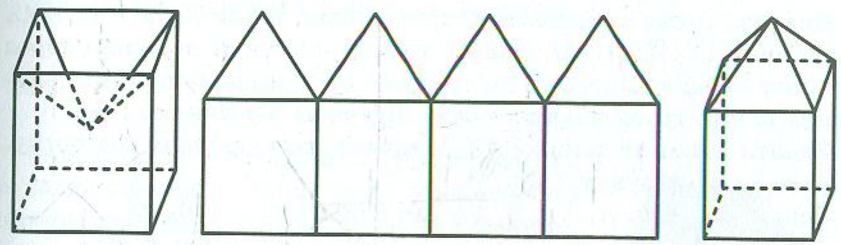


Рис. 1.16

У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з розгортками прямокутного паралелепіпеда, зокрема куба.

На рисунку 1.17, *а* зображено многогранник, на рисунку 1.17, *б* — його розгортку. Зауважимо, що із цієї розгортки можна «склеїти», наприклад, і многогранник, зображений на рисунку 1.17, *в*. Тому якщо ми хочемо за розгорткою відновити многогранник, то потрібно мати схему її склеювання.



а *б* *в*

Рис. 1.17

Використання розгортки многогранника є ефективним методом розв'язування цілої низки задач, де потрібно знайти найменшу відстань по поверхні між двома точками многогранника.

Задача 3. На середині ребра B_1C_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили точку M. Відомо, що $AB = \sqrt{3}$ см, $AA_1 = 2$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками A і M по поверхні призми.

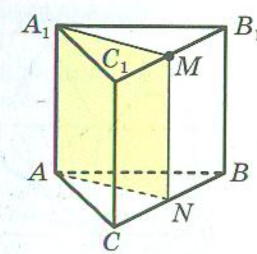


Рис. 1.18

Розв'язання. Зауважимо, що площина AA_1M є площиною симетрії правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.18).

Це зауваження дає змогу під час пошуку найменшої відстані між точками A і M по поверхні призми обмежитися розглядом ламаних трьох видів (рис. 1.19):

1) ламані AXM, де X — точка на відрізку CN, N — середина BC;

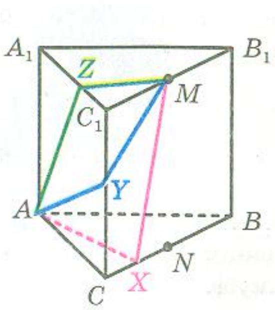


Рис. 1.19

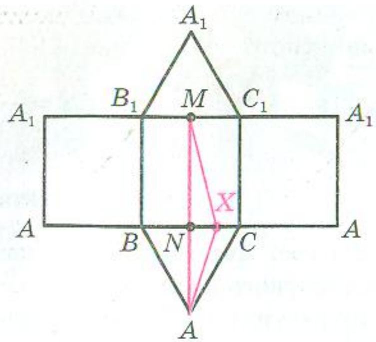


Рис. 1.20

2) ламані AYM, де Y — точка на ребрі CC_1;

3) ламані AZM, де Z — точка на ребрі A_1C_1.

Виходитимемо з таких міркувань. Нехай точки X_0, Y_0 і Z_0 такі, що ламані AX_0M, AY_0M і AZ_0M мають найменші довжини серед ламаних першого, другого та третього виду відповідно. Тоді найменша із цих трьох довжин і буде шуканою відстанню.

Знайти довжину ламаної AX_0M можна, розглянувши розгортку, зображену на рисунку 1.20.

Оскільки точки A, N і M лежать на одній прямій, то

$$AX + XM \geqslant AN + NM = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \text{ см}.$$

Тут точка X_0 збігається з точкою N.

Для того щоб знайти довжини ламаних AY_0M і AZ_0M, розглянемо розгортки, зображені на рисунках 1.21 і 1.22.

Якщо точки A, Y_0, M лежать на одній прямій, то $AY + YM \geqslant AM = AY_0 + Y_0M$ (рис. 1.21).

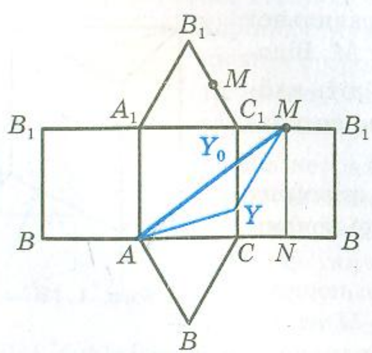


Рис. 1.21

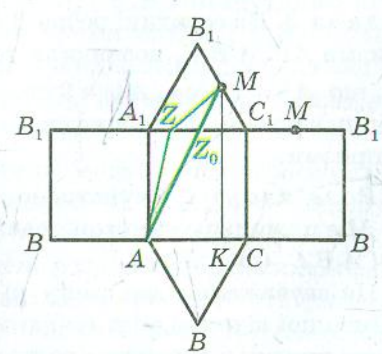


Рис. 1.22

Довжину ламаної AY_0M можна знайти, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника ANM.

Оскільки $MN = 2$ см, $AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см, то $AM = \sqrt{4 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{43}}{2}$ см.

Якщо точки A, Z_0, M лежать на одній прямій, то $AZ + ZM \geqslant AM = AZ_0 + Z_0M$ (рис. 1.22).

Довжину ламаної AZ_0M знайдемо, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника AKM, де точка K — основа перпендикуляра, опущеного з точки M на відрізок AC. Нескладно визначити (зробіть це самостійно), що $AK = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ см, $MK = \frac{11}{4}$ см.

Тоді $AM = \sqrt{\frac{27}{16} + \frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ см.

Залишається вибрати найменше із чисел: $\frac{7}{2}$, $\frac{\sqrt{43}}{2}$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{37}}{2}$ см. ◄

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри[1] Вороного—Діріхле (рис. 1.23) використовують для аналізу структури кристалів.

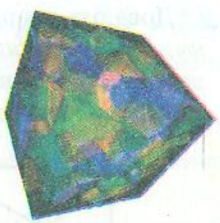


Рис. 1.23

Георгій Феодосійович Вороний

(1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов'язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об'єктом.

[1] Поліедром називають об'єднання многогранників.