Цікаві задачі для учнів неледачих

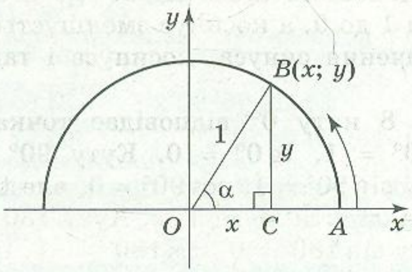
29. (*Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 рік*). З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр BO до сторони AD. Коло із центром у точці A проходить через вершину B і перетинає сторону AD у точці K. Відомо, що $AK = 8$ см, $KD = 6$ см, $AO = 7$ см.

1. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

§ 2. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника як відношення певних його сторін. Тепер сформулюємо означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180°.

Уведемо на площині прямокутну систему координат і проведемо в її першому і другому координатних кутах півколо радіуса 1, центр якого збігається з початком координат (мал. 7). Назвемо його *одиничним півколом*. Позначимо буквою A точку перетину цього півкола з додатним напрямом осі x і домовимося відкладати від променя OA кути проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ – гострий кут, точка B належить півколу. Проведемо з точки B перпендикуляр BC до осі x. Утворився прямокутний трикутник OBC з гіпотенузою OB, де $OB = 1$.

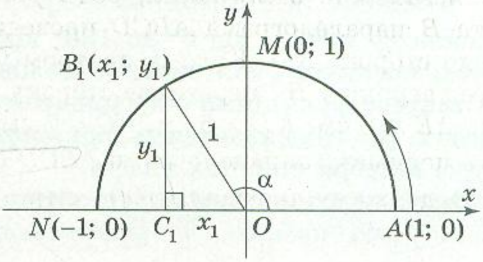


Мал. 7

Значення синуса, косинуса, тангенса гострого кута α виразимо через координати точки B:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Так само будемо знаходити синус, косинус і тангенс інших кутів від $0°$ до $180°$. Нехай $B_1(x_1; y_1)$ – точка одиничного півкола, що лежить у другій чверті (мал. 8).



Мал. 8

Тоді $\angle B_1OA$ – тупий. Маємо:

$\sin\alpha = \dfrac{y_1}{1} = y_1;\ \cos\alpha = \dfrac{x_1}{1} = x_1;\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1}{x_1}.$

Оскільки координати $(x; y)$ точок одиничного півкола змінюються в межах $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то для довільного α такого, що $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, справджуються нерівності:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Але якщо:

α – гострий, то $\sin\alpha = y > 0$; $\cos\alpha = x > 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} > 0$;

α – тупий, то $\sin\alpha = y > 0$; $\cos\alpha = x < 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} < 0$.

Окрім того, якщо кут α збільшується від $0°$ до $90°$, то його синус збільшується від 0 до 1, а косинус зменшується від 1 до 0. Якщо кут α збільшується від $90°$ до $180°$, то його синус зменшується від 1 до 0, а косинус зменшується від 0 до -1.

Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса кутів $0°$, $90°$ і $180°$.

На малюнку 8 куту $0°$ відповідає точка $A(1; 0)$. Тому $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Куту $90°$ відповідає точка $M(0; 1)$, тому $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, але $\operatorname{tg} 90°$ – не існує, оскільки на нуль ділити не можна. Куту $180°$ відповідає точка $N(-1; 0)$, тому $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Отже,

якщо $B(x; y)$ – точка одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 7), то

$$\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$