АЛГЕБРА ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

ДІЙСНІ ЧИСЛА

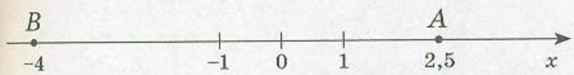
ДОДАТНІ ТА ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

Пряма з вибраними на ній початком відліку, одиничним відрізком і вказаним додатним напрямом називається координатною прямою.

Число, що показує положення точки на координатній прямій, називається координатою точки.

Приклад

Точка A розташована на прямій (див. рисунок) на відстані 2,5 одиничних відрізка праворуч від 0. Це означає, що координата точки A — число $+2{,}5$. Позначається: $A(2{,}5)$.



Точка B на рисунку розташована ліворуч від 0 на відстані 4 одинакових відрізків. Позначається: $B(-4)$.

Числа зі знаком «+» називають додатними. При записі додатних чисел знак «+», як правило, опускають.

Числа зі знаком «−» називають від'ємними.

Число 0 не є ні додатним, ні від'ємним. Два числа, що відрізняються одне від одного лише знаком, називаються протилежними числами.

Число, протилежне числу a, позначають $-a$. Таким чином, якщо $a=7$, то $-a=-7$; якщо $a=-9$, то $-a=9$, тобто $-(-9)=9$. Число 0 протилежне саме собі: $0=-0$. Якщо дане число додатне, то протилежне йому — від'ємне і навпаки.

Зверніть увагу, що за записом $(-x)$ не можна сказати, яке це число — додатне чи від'ємне.

Якщо x — додатне, то $(-x)$ — від'ємне; якщо x — від'ємне, то $(-x)$ — додатне; якщо $x=0$, то $-x=0$.

МНОЖИНИ ЧИСЕЛ

Натуральні числа, протилежні їм числа і число 0 називаються цілими числами.

Раціональні числа — це числа, які можуть бути записані у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. І навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є раціональним числом.

Числа, які зображуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають ірраціональними.

Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел.

Позначення:
множина натуральних чисел — $\boldsymbol{N}$;
множина цілих чисел — $\boldsymbol{Z}$;
множина раціональних чисел — $\boldsymbol{Q}$;
множина дійсних чисел — $\boldsymbol{R}$.

Зверніть увагу: кожне натуральне число є цілим, кожне ціле — раціональним, кожне раціональне — дійсним.

Приклади ірраціональних чисел:
$\pi=3{,}1416\ldots$; $0{,}12345\ldots$; $10{,}1010010001\ldots$; $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня й ділити (ділити на числа, що відмінні від 0).

МОДУЛЬ ЧИСЛА І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Модуль числа — це відстань від 0 до точки, що відповідає цьому числу на координатній прямій, виміряна в одиничних відрізках.

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\geqslant 0 \\ -a, \text{ якщо } a<0. \end{cases}$$

Отже, $|a|\geqslant 0$ для всіх значень a.

ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ

1. Модулі протилежних чисел рівні: $|a|=|-a|$.
2. Якщо $|a|\leqslant b$, то $-b\leqslant a\leqslant b$.
3. Якщо $|a|\geqslant b$, то $\left[\begin{array}{l} a\geqslant b; \\ a\leqslant -b. \end{array}\right.$
4. Модуль суми скінченного числа дійсних чисел не перевищує суми модулів цих чисел:
$$|a_1+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+\ldots+|a_n|.$$
5. Модуль різниці не менший за різницю модулів цих чисел:
$|a-b|\geqslant|b|-|a|$.
6. Модуль добутку скінченного числа співмножників a_1, ..., a_n дорівнює добутку модулів цих співмножників:
$|a_1\cdot\ldots\cdot a_n|=|a_1|\cdot\ldots\cdot|a_n|$.
7. Модуль частки дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника:
$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, якщо $b\neq 0$.

Приклади модуля числа

$|5,2|=5,2$; $\left|-3\frac{1}{8}\right|=3\frac{1}{8}$; $|0|=0$.

Приклади розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля

1) $|x|=6$; $x=6$ або $x=-6$.

2) $|x|=0$; $x=0$.

3) $|x|=-9$; рівняння не має коренів, тому що модуль числа не може бути від'ємним.

4) $|2x-5|=4,6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-5=4,6, \\ 2x-5=-4,6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4,8, \\ x=0,2. \end{array}\right.$

Відповідь: $x_1=4,8$, $x_2=0,2$.

5) $|x^2-2x|=3-2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3-2x\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x=3-2x, \\ x^2-2x=2x-3; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}, \\ x=-\sqrt{3}, \\ x=3, \\ x=1; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3}, \\ x=1. \end{array}\right.$

Треба враховувати, що модуль будь якого числа є числом невід'ємним, отже, ко рені $\sqrt{3}$ і 3 є сторонніми.

Відповідь: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=1$.

6) $|x-1|\leqslant 4,2 \Leftrightarrow -4,2\leqslant x-1\leqslant 4,2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3,2\leqslant x\leqslant 5,2$.

Відповідь: $x\in[-3,2;\ 5,2]$.

7) $|x+2|\geqslant 6-3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-3x\leqslant 0, \\ \left\{\begin{array}{l} 6-3x\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2\geqslant 6-3x, \\ x+2\leqslant 3x-6 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 1, \\ x\geqslant 4; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ 1\leqslant x\leqslant 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geqslant 1.$

Відповідь: $[1;\ +\infty)$.

Складаючи першу сукупність, ми ура вали, що модуль будь-якого числа є завж числом невід'ємним. Із цього випливає, при тих значеннях x, коли права част є числом недодатним, нерівність завжди конується.

8) Дуже корисним у розв'язуванні завд з модулем є спосіб розбиття коорди ної прямої на такі інтервали, що в можна визначити знак підмодуль виразу й розкрити знак модуля.
$|x+1|+|x-3|=4$.

Знайдемо, при яких значеннях x пі дульні вирази перетворюються на нуль:

$x+1=0$; $x-3=0$;
$x_1=-1$. $x_2=3$.