

БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Т.Ю. Демець, С.В. Кметюк

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ,
НЕРІВНОСТІ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ.
ПАРАМЕТРИ В РАЦІОНАЛЬНИХ
РІВНЯННЯХ, НЕРІВНОСТЯХ
ТА ЇХНІХ СИСТЕМАХ



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

Демець Т.Ю., Кметюк С.В.
Д30 Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи. Параметри в раціональних рівняннях, нерівностях та їхніх системах. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 72 с. (Бібліотечка фізико-математичної школи).

ISBN 978-966-10-2706-9

Посібник складається з дев'яти розділів, в яких зібрані завдання з теми «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи», а також завдання, які відсутні у шкільних підручниках непрофільних класів, такі як «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи з параметрами».

Система вправ розроблена від найпростіших завдань на поняття параметра до завдань олімпіадного рівня.

Кожний розділ даного посібника містить докладно розв'язані приклади і систему вправ для самостійного розв'язування та відповіді.

Даний посібник може бути використаний для детального повторення матеріалу в період підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання та державної підсумкової атестації.

Для учнів старших класів загальноосвітніх і спеціалізованих шкіл, абітурієнтів, учителів математики та людей, які захоплюються математикою.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

Передмова

Мета пропонованого посібника — надати допомогу випускникам загальноосвітніх навчальних закладів, ліцеїв, гімназій та вчителям у процесі підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) та державної підсумкової атестації (ДПА).

Посібник складається з дев'яти розділів, в яких зібрані завдання з теми «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи». Також у посібнику містяться завдання, які відсутні у шкільних підручниках, такі як «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи з параметрами».

Поняття параметр, згідно з базовими підручниками, вводиться у курсі математики загальноосвітньої школи у сьомому класі, хоча до розв'язання завдань даної тематики приділяється занадто мало уваги, як у сьомому класі, так і у старших класах (крім спеціалізованих).

Засвоєння поняття параметра сприяє формуванню в учнів абстрактного та алгоритмічного видів мислення та пошукової евристичної діяльності.

Система вправ розроблена від найпростіших завдань на поняття параметра до завдань олімпіадного рівня.

У порівнянні зі звичайними завданнями задачі з параметрами є набагато складнішими для школярів і абітурієнтів, але такі вправи стали невід'ємним атрибутом ЗНО з математики. Тому кожний розділ даного посібника містить докладно розв'язані приклади, систему вправ для самостійного розв'язування та відповіді, що допоможе учням оволодіти вмінням досліджувати раціональні рівняння, нерівності та системи з параметрами.

Даний посібник може бути використаний для детального повторення матеріалу в період підготовки до ЗНО та ДПА.

1. Раціональні рівняння. Модуль в раціональних рівняннях

Рівень 1

1. Яке з рівнянь не має розв'язків:
 - а) $x^2 + 144x = 0$;
 - б) $x^2 - 14 = 0$;
 - в) $x^2 + 14 = 0$;
 - г) $x^2 = 40$;
 - д) $x^2 = -3x$?
2. Яке з рівнянь не має розв'язків:
 - а) $x^2 - 15x = 0$;
 - б) $x^2 - 13 = 0$;
 - в) $x^2 + 5 = 0$;
 - г) $x^2 = 49$;
 - д) $x^2 = -x$?
3. Яке з рівнянь не має розв'язків:
 - а) $x^2 = 36$;
 - б) $x^2 = 10x$;
 - в) $x^2 - 4 = 0$;
 - г) $x^2 + 7 = 0$;
 - д) $x^2 = x + 12$?
4. Яке з рівнянь не має розв'язків:
 - а) $x^2 + 7 = 0$;
 - б) $x^2 - 16x = 0$;
 - в) $x^2 = 9$;
 - г) $x^2 - 10 = 0$;
 - д) $x^2 = 3x + 2$?
5. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 6x + 9 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.
6. Скільки коренів має рівняння $2x^2 - 9x - 5 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.
7. Скільки коренів має рівняння $2x^2 - 3x + 4 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.
8. Скільки коренів має рівняння $3x^2 + 13x + 4 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.
9. Скільки коренів має рівняння $3x^2 + 5x + 4 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 12x + 36 = 0$?
 - а) Один;
 - б) два;
 - в) жодного;
 - г) безліч;
 - д) інша відповідь.

11. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ дорівнює:
 - а) 3;
 - б) 4;
 - в) -3;
 - г) -4;
 - д) інша відповідь.
12. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$ дорівнює:
 - а) 3;
 - б) 10;
 - в) -10;
 - г) -3;
 - д) інша відповідь.
13. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$ дорівнює:
 - а) -8;
 - б) 15;
 - в) 8;
 - г) -15;
 - д) інша відповідь.
14. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ дорівнює:
 - а) 2;
 - б) -2;
 - в) 8;
 - г) -8;
 - д) інша відповідь.
15. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнює:
 - а) 21;
 - б) -4;
 - в) 4;
 - г) -21;
 - д) інша відповідь.
16. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 5x - 14 = 0$ дорівнює:
 - а) -14;
 - б) 14;
 - в) 5;
 - г) -5;
 - д) інша відповідь.
17. Добуток коренів квадратного рівняння $3x^2 + 11x - 4 = 0$ дорівнює:
 - а) $-\frac{4}{3}$;
 - б) $\frac{4}{3}$;
 - в) $\frac{11}{3}$;
 - г) $-\frac{11}{3}$;
 - д) $\frac{3}{4}$.
18. Добуток коренів квадратного рівняння $5x^2 + 13x - 6 = 0$ дорівнює:
 - а) $-\frac{6}{5}$;
 - б) $\frac{6}{13}$;
 - в) $\frac{13}{5}$;
 - г) $-\frac{13}{5}$;
 - д) $\frac{5}{6}$.
19. Добуток коренів квадратного рівняння $6x^2 - 5x + 1 = 0$ дорівнює:
 - а) 1;
 - б) $-\frac{1}{6}$;
 - в) $-\frac{5}{6}$;
 - г) $\frac{1}{6}$;
 - д) -1.
20. Сума коренів квадратного рівняння $4x^2 - 11x - 3 = 0$ дорівнює:
 - а) $-\frac{3}{4}$;
 - б) $\frac{3}{4}$;
 - в) $-\frac{11}{4}$;
 - г) $\frac{11}{4}$;
 - д) інша відповідь.

21. Сума коренів квадратного рівняння $4x^2 + 5x - 6 = 0$ дорівнює:
 а) $-\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $-\frac{3}{2}$;
 г) $\frac{3}{2}$; г) інша відповідь.
22. Сума коренів квадратного рівняння $3x^2 + 11x - 4 = 0$ дорівнює:
 а) -11 ; б) $-\frac{11}{3}$; в) $-\frac{4}{3}$;
 г) $\frac{11}{3}$; г) інша відповідь.

Рівень 2

- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 0$.
- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$.
- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x + 5| = 7$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|2x - 1| = 5$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x - y| + |4 - x| = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|2x - y| + 2|x - 2| = 0$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|2 - 3x| = x + 3$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|4 - 2x| + x = 2,6$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|1 - 2x| = x + 0,3$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|4 - 3x| + 0,2 = x$.
- Знайти кількість розв'язків рівняння: $|3 - x| = x - 3$.
- Знайти кількість розв'язків рівняння: $|5x + 1| = 5x + 1$.
- Розв'язати рівняння: $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $||x + 2| - 1| = 4$.

- Знайти суму розв'язків рівняння: $||x - 1| - 3| = 2$.
- Знайти розв'язок рівняння $|x - 3| - |2 - x| = -0,4$ з проміжку $(2; 3)$.
- Знайти розв'язок рівняння $|x - 1| - |x + 2| = 1$ з проміжку $(-2; 1)$.
- Розв'язати рівняння: $|x^2 + x - 3| = x$.
- Розв'язати рівняння: $|x^2 + 2x - 3| = |x - 1|$.
- Розв'язати рівняння: $|4x^2 + 3x - 2| = |3x - 4|$.
- Розв'язати рівняння: $|x^2 - 5x + 6| = |x + 4|$.
- Розв'язати рівняння: $|x^2 - 1| = |5 - x^2|$.
- Розв'язати рівняння: $|x + 5| + |x - 8| = 13$.
- Розв'язати рівняння: $|x| - |x - 2| = 2$.
- Розв'язати рівняння: $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^2 - 6x + |1 - x| + 5 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $|x^2 - 25| + |x^2 - 1| = 24$.
- Розв'язати рівняння: $x^2 - 2x \frac{x - 1}{|x - 1|} - 3 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^2 - 5x \frac{|x - 3|}{x - 3} + 6 = 0$.

Рівень 3

- Розв'язати рівняння: $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $15x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) = 12$.
- Розв'язати рівняння: $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$.
- Розв'язати рівняння: $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.
- Розв'язати рівняння: $(2x - 3)(2x - 1)(x + 1)(x + 2) = 36$.
- Розв'язати рівняння: $(x + 2)(x + 1)(x - 3)(x + 6) = -96$.

5. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 2|x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ має вісім різних розв'язків?
6. Знайти всі значення параметрів a та b , при яких система рівнянь $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ |x| + |y| + z^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.
7. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} (x+y)^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 2(a+1) \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
8. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
9. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має рівно три розв'язки.
10. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ має єдиний розв'язок?
11. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |x| + y = a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?
12. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases} (x-y)^2 = 6a-14, \\ x^2 + y^2 = 3(2+a) \end{cases}$ має два розв'язки.
13. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Приклади розв'язування завдань

Рівень 2

4. в) Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} 2x + ay = 2 + a, \\ (a+1)x + 2ay = 4 + 2a \end{cases}$ має нескінченну кількість розв'язків.

Розв'язання. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має нескінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли прямі, що визначаються першим і другим рівняннями, співпадають. А це можливо тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти рівнянь системи пропорційні, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Таким чином, в задачі потрібно знайти всі значення

параметра a , при яких виконуються рівності $\frac{2}{a+1} = \frac{a}{2a} = \frac{2+a}{4+2a}$,

що можна записати у вигляді системи двох рівнянь $\begin{cases} \frac{2}{a+1} = \frac{a}{2a}, \\ \frac{a}{2a} = \frac{2+a}{4+2a}. \end{cases}$

Якщо $a \notin \{0; 2\}$, то друге рівняння перетворюється у тотожність, а перше набуває вигляду $\frac{2}{a+1} = \frac{1}{2}$. Розв'язком останнього рівняння є значення $a = 3$.

Якщо $a = 0$, початкова система набуває вигляду $\begin{cases} 2x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$ Вона не-сумісна.

Зрештою, поклавши $a = -2$ у початкову систему, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -x - 4y = 0. \end{cases}$ Вона має єдиний розв'язок $x = y = 0$.

Отже, початкова система рівнянь має нескінченну множину розв'язків при $a = 3$.

Відповідь. 3.

Література

1. Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль. — К.: Вид. комплекс «Поліграфсервіс», 2001. — 256 с.: іл.
2. Балан В.Г., Лавренюк В.І., Шарова Л.І. Квадратний тричлен з параметром на вступних іспитах. — К.: Альфа, 2006. — 80 с.
3. Вавилов В.В., Мельников І.І., Олейник С.Н., Пасиченко П.І. Задачі по математике. Алгебра. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. літератури. 1987. — 495 с.
4. Гончаренко Ю.В., Хрузин А.Н. Системи уравнений с параметрами. — К.: Кий, 1996. — 48 с.
5. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачі с параметрами. — К.: РІА «Текст»; МП «Око», 1992. — 290 с.
6. Кухарчук М.М., Ясінський В.В. Математика. Задачі вступних іспитів до НТУУ «КПІ». — К.: «КПІ», 1997. — 120 с.
7. Лукаш О.В., Пресс Е.М. Розв'язуємо задачі з параметрами. — Х.: Вид група «Основа», 2006. — 144 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонский В. Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. — К.: А. С. К., 1997. — 277 с.
9. Моргун О.О., Фурман М.С. Алгебра–9. — Х.: Вид. група «Основа», 2006. — 224 с.
10. Репета В. К., Клешня Н.О., Репета Л.А. Задачі з параметрами. Посібник для абітурієнтів та старшокласників. — К.: КМУЦА, 2000. — 120 с.
11. Сільвестрова І.А., Фурман М.С. Навчасьтесь розв'язувати рівняння та нерівності. — Х.: Вид. група «Основа», 2004. — 154 с.
12. Ясінський В.В. Алгебра. Функції та їх графіки. Задачі з параметрами. — К.: НТУУ «КПІ», 2000. — 43 с.

Зміст

Передмова	3
1. Раціональні рівняння. Модуль в раціональних рівняннях.....	4
2. Параметри в раціональних рівняннях	10
3. Раціональні нерівності	17
4. Параметри в раціональних нерівностях	24
5. Системи раціональних рівнянь	29
6. Системи раціональних рівнянь з параметрами	36
7. Системи раціональних нерівностей. Модуль в системах раціональних нерівностей.....	41
8. Системи раціональних нерівностей з параметрами	46
9. Графічний метод розв'язання раціональних рівнянь, нерівностей та їхніх систем з параметрами	50
Відповіді	60
Література	68



“КНИГА ПОШТОЮ” А/С 529
м. Тернопіль, 46008
т. (0352) 287489, 511141
(067) 3501870, (066) 7271762
mail@bohdan-books.com

Навчальне видання

КМЕТЮК Світлана Володимирівна
ДЕМЕЦЬ Тетяна Юріївна

**РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ
ТА ЇХНІ СИСТЕМИ.
ПАРАМЕТРИ В РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ,
НЕРІВНОСТЯХ ТА ЇХНІХ СИСТЕМАХ**

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.02.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 4,19. Умовн. фарбо-відб. 4,19.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2706-9



9 789661 027069