

§ 1.

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Описуючи реальні процеси мовою математики, часто отримують вирази, які містять дію ділення на вираз зі змінною. У цьому параграфі ми розглядатимемо саме такі вирази.

Ми з'ясуємо, що таке дробовий вираз, дріб, раціональний вираз; як здійснювати тотожні перетворення раціональних виразів; як розв'язувати рівняння з дробовими виразами.

$2a + b^2$ — цілий вираз

$\frac{a}{c^2 + b}$ — дріб

$\frac{a}{b} + \frac{d}{c}$ — дробовий вираз

раціональні
вирази

1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

1. Цілі, дробові та раціональні вирази. У сьомому класі ми вивчали цілі вирази. Прикладами таких виразів є:

$$a + b; \quad 3a^2; \quad 2x(x-y)^2; \quad \frac{c}{3}; \quad a : 4; \quad b; \quad 3.$$

Пригадаймо: цілі вирази можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, а також дію ділення, але тільки на число, відмінне від нуля.

Кожний цілий вираз можна записати у вигляді многочлена. Наприклад,

$$2x(x-y)^2 = 2x(x^2 - 2xy + y^2) = 2x^3 - 4x^2y + 2xy^2.$$

Розглянемо вирази

$$\frac{5y}{y+1} + 1, \quad \frac{17ab}{a^2 - b^2}, \quad 3a : b, \quad (x-y)^2 - \frac{x}{x+y}.$$

Ці вирази відрізняються від цілих виразів тим, що містять дію ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *дробовими раціональними виразами*.

Цілі й дробові раціональні вирази називають *раціональними виразами*.

| | |
|---------------------------|-----------------------|
| $4b + a^3$ | $\frac{4}{b} + a^3$ |
| <i>Цілий вираз</i> | <i>Дробовий вираз</i> |
| <i>Раціональні вирази</i> | |

Розглянемо раціональні вирази $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{2,3}{x(y+2)}$, $\frac{5a}{7}$. Вони є частками двох виразів, до того ж, дію ділення записано за допомогою риски дробу. Такі вирази називають *дробами*.

Якщо маємо дріб $\frac{A}{B}$, де A і B — деякі числові вирази або вирази зі змінними, то вираз A називають *чисельником* дробу, а вираз B — *знаменником*.

Отже, $\frac{ab}{a+b}$ — дріб із чисельником ab і знаменником $a + b$.

Дріб $\frac{A}{B}$, у якому A і B — многочлени, називають *раціональним дробом*.

Наприклад, $\frac{4}{x+3}$, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{b}{3}$ — раціональні дроби.

2. Допустимі значення змінних. Розглянемо дробовий вираз $\frac{5}{a-2}$.

Якщо $a = 3$, то значення цього виразу дорівнює: $\frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$;

якщо $a = -6$, то значення виразу дорівнює: $\frac{5}{-6-2} = -\frac{5}{8}$.

Значення виразу $\frac{5}{a-2}$ можна знайти для будь-якого значення a , крім $a = 2$.

Якщо $a = 2$, то знаменник $a - 2$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть: якщо $a \neq 2$, то вираз $\frac{5}{a-2}$ має зміст, а якщо $a = 2$, то вираз не має змісту. Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями змінних*.

Означення Допустимими значеннями змінних виразу називають такі їх значення, для яких вираз має зміст.

Так, для виразу $\frac{5}{a-2}$ допустимими значеннями змінної є всі значення a , крім $a = 2$.

Допустимими значеннями змінних будь-якого цілого виразу є всі значення змінних. Допустимими значеннями змінних дробового раціонального виразу є всі значення змінних, крім тих, для яких дорівнює нулю знаменник хоча б одного з дробів, що входять до даного виразу.

3. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Розглянемо цілий вираз $x^2 + x(2 - x)$. Оскільки

$$x^2 + x(2 - x) = x^2 + 2x - x^2 = 2x,$$

то для будь-якого значення змінної x відповідні значення виразів $x^2 + x(2 - x)$ і $2x$ дорівнюють одне одному. Такі цілі вирази ми називали тотожно рівними.

А які два не цілі вирази вважають тотожно рівними?

3. Знайдіть значення виразу $\frac{10}{a}$, якщо $a = 10$; $a = -1$; $a = 2$.

4. Які з рівностей є тотожностями?

а) $\frac{a+3a}{a-1} = \frac{4a}{a-1}$;

б) $\frac{a \cdot 3a}{a-1} = \frac{3a}{a-1}$;

в) $\frac{b}{a(a+b)} = \frac{b}{a^2+ab}$.

Рівень А



Знайдіть значення виразу:

5. а) $\frac{-x^2}{x+5}$, якщо $x = 0$; $x = 5$; $x = -3$;

б) $\frac{2ab}{a-b}$, якщо $a = 4$, $b = 2$; $a = -4$, $b = 6$.

6. а) $\frac{(-y)^2}{y-4}$, якщо $y = 0$; $y = 6$; $y = -1$; б) $\frac{2b+c}{2b-c}$, якщо $b = 3$, $c = 4$.

Заповніть таблицю:

7.

| | | | | | | |
|-----------------|----|----|---|---|-----|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 1,5 | 2 |
| $\frac{x}{x+1}$ | | | | | | |

8.

| | | | | | | |
|-----------------|----|----|---|---|---|-----|
| a | -4 | -1 | 0 | 1 | 2 | 2,5 |
| $\frac{3}{a-2}$ | | | | | | |

Укажіть допустимі значення змінної у виразі:

9. а) $\frac{6x^2+1}{x-2}$; б) $\frac{6a+1}{a(a-3)}$; в) $\frac{b}{b+1} + \frac{1}{b}$; г) $\frac{11x}{x^2+2}$.

10. а) $\frac{1-y^3}{y+3}$; б) $\frac{5}{2x} - \frac{1}{x-2}$; в) $\frac{m}{(m-1)(m+1)}$; г) $\frac{a+1}{a^2+1}$.

11. Автомобіль проїхав 195 км за t год. Запишіть у вигляді виразу швидкість автомобіля. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3$.

12. Оператор набрав 45 сторінок тексту за k год. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок, які оператор набрав за 1 год. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 9$.