

## Вступ

**Б**ез математичного аналізу в нас не було би мобільних телефонів, комп'ютерів і мікрохвильовок. Не було би радіо. І телебачення. Майбутні мами не змогли би скористатися УЗД, а заблукалі мандрівники — GPS. Ми не розібрали б на частинки атом, не розгадали би геном людини, не відправили би астронавтів на Місяць. Можливо, не було би навіть американської Декларації незалежності.

Те, що загадкова галузь математики назавжди змінила світ, — цікавий історичний момент. Як так могло статися, що теорія, яка від самого початку була про форми, — переформатувала саму цивілізацію?

Найкраще на це питання відповів фізик Річард Фейнман, коли обговорював з письменником Германом Воуком Мангеттенський проєкт. Воук хотів написати великий роман про Другу світову і вивчав цю тему, тож приїхав у Калтех поговорити з фізиками, які працювали над бомбою. Фейнман був одним із них. Після інтерв'ю, коли вони вже прощалися, Фейнман спитав Воука, чи розбирається той у матаналізі. Воук визнав: «Ні, зовсім не знаю». «Раджу вивчити, — сказав Фейнман. — Це Божа мова»<sup>1</sup>.

Ніхто не розуміє чому, але Всесвіт — глибоко математична річ. Може, таким його задумав Бог. А можливо, Всесвіт, у якому ми живемо, може бути тільки таким, бо істот, які досить розумні, щоб ставити питання, нематематичний Всесвіт утримувати не здатен. У кожному разі, сам факт, що Всесвіт підвладний законам природи, які завжди можна виразити мовою матаналізу — з реченнями

у вигляді диференціальних рівнянь, — загадковий і неймовірний. Такі рівняння описують різницю між тим, якою річ була просто зараз, і тим, якою стане в наступну мить; або між чимось, що розташоване просто тут, і чимось нескінченно близьким до нього. Дещо залежить від того, про яку саме частину природи йде мова, але структура законів завжди однакова. Інакше кажучи, схоже, що у Всесвіті існує щось типу коду, операційна система, яка лежить в основі всього — у кожній секунді, у кожному міліметрі. Матаналіз спирається на цей порядок і виражає його.

Першим цю таємницю Всесвіту помітив Ісаак Ньютон. Він звернув увагу, що орбіти планет, ритм хвиль і траєкторії польоту гарматних ядер можна описати, пояснити і спрогнозувати за допомогою маленького набору диференціальних рівнянь. Сьогодні ми називаємо їх просто «законами Ньютона». Відтоді ми вже розібралися, що ті самі правила спрацьовують завжди, коли ми відкриваємо нову частину Всесвіту. Колись це були просто земля, вода, вогонь і повітря, тепер це електрони, кварки, чорні діри й суперструни. Уся нежива природа підвладна диференціальним рівнянням. Б'юся об заклад, саме це Фейнман і мав на увазі, коли говорив, що матаналіз — Божа мова. Якщо й можна щось назвати таємницею Всесвіту — то це матаналіз.

Люди випадково відкрили цю дивну мову — спочатку як частинку геометрії, потім як частину коду Всесвіту. Згодом навчилися вільно нею говорити й розшифровувати її ідіоми й нюанси. І нарешті вони оволоділи її можливостями прогнозувати майбутнє та почали за її допомогою змінювати світ.

Це головна теза цієї книжки.

Якщо вона правильна, то відповідь на головне питання життя, Всесвіту й усього — не 42, і нехай мене вибачать фанати Дугласа Адамса та «Автостопом по Галактиці»<sup>2</sup>. Але Великий Мислитель думав у правильному напрямку: таємниця Всесвіту справді пов'язана з математикою.

## Матаналіз для всіх

З афоризму Фейнмана про Божу мову виникає багато складних питань. Що таке математичний аналіз? Як люди зрозуміли, що ним говорить Бог (або, якщо вам так більше подобається, — що ця штука управляє Всесвітом?). Що таке диференціальні рівняння і яка їхня роль у світі — не тільки за часів Ньютона, а й тепер? І нарешті, як захопливо й доступно розповісти про ці історії та ідеї читачам на зразок Германа Воука, які добровільно взяли щось таке читати, — вдумливим, зацікавленим, освіченим, але які мало що знають про вищу математику?

На закінчення історії про свою зустріч із Фейнманом Воук написав, що він за чотирнадцять років навіть і не спробував вивчити матаналіз. Його великий роман виріс у два великих романи — «Вітри війни» (Winds of War) і «Війна і пам'ять» (War and Remembrance). Після них він спробував вивчити матаналіз сам, за книжками типу «Матаналіз — це просто», але не надто вдалося. Він покопирсався в кількох підручниках, сподівався, за його словами, «знайти той, що допоможе такому математичному невіглазу, як я<sup>3</sup>, який в університеті був гуманітарієм — вивчав літературу і філософію, наприклад — із дорослим питанням про сенс буття. Я знав тільки, що матаналіз, який усі називали безглуздим занудством, — це Божа мова». Коли осилити підручники не вдалося, він знайшов собі єврейського репетитора з математики, щоб підтягнути заразом і матаналіз, і свій іврит. Але не склалося ні з тим ні з тим. Нарешті він у розпачі пішов на курс матаналізу у старшій школі, але клас його сильно випереджав — і він кинув навчання через кілька місяців. Коли він ішов, діти аплодували йому. За його словами, це було схоже на співчутливі оплески, коли в артиста не вдався номер.

Я написав «Математику Всесвіту», бо хочу, щоб прекрасні ідеї та історії матаналізу були доступні всім. Якщо людина хоче більше дізнатися про цю важливу частину людської історії, вона не повинна долати такий шлях, як Герман Воук. Математичний аналіз — одне з тих досягнень людства, які надихають найбільше. Щоб оцінити матаналіз, не обов'язково займатися ним, так само

як не обов'язково навчитися ідеально готувати, щоб смачно поїсти. Я спробую все пояснити картинками, метафорами й анекдотами. Розповім також про найкращі рівняння й доведення — не можна ж сходити в музей і не подивитись шедеври, які в ньому є. Що стосується Германа Воука, то на момент, коли я пишу ці слова, йому 103 роки. Не знаю, чи вивчив він зрештою матаналіз. Але якщо ні, містере Воук, ця книжка для вас.

### Світ з погляду матаналізу

Як ви вже мали зрозуміти, я говоритиму про історію і значення матаналізу з погляду математика-практика. Історик математики розповідав би про це інакше<sup>4</sup>. І математик-теоретик теж. Мене, як практика, зачаровує те, як взаємодіють між собою реальний навколишній світ та ідеальний світ у наших головах. Феномени із зовнішнього світу викликають у нас певні питання — і навпаки, інколи математичні обчислення прогнозують щось, що потім відбувається в реальності. Коли так трапляється — стає навіть страшно.

Бути математиком-практиком<sup>5</sup> означає бути відкритим до незвичного і знати щось майже про все на світі. Для тих, хто працює в моїй галузі, математика — це не герметично запакований у первозданному вигляді світ теорем і доведень<sup>6</sup>, де всі повторюють одне одного. Наша робота зачіпає багато предметів: філософію, політологію, фізику, історію, медицину — геть усе. Якраз цю історію я й хочу розповісти — який він, світ, з погляду матаналізу.

Це куди ширший погляд на матаналіз, аніж ми звикли його сприймати. Він охоплює не тільки сам матаналіз, а і його братів-сестер і родичів-знайомих, як у математиці, так і в дотичних дисциплінах. Такий масштабний підхід є нестандартним, і я не хотів би, щоб це якось вас заплутало. Наприклад, коли я говорив, що без матаналізу в нас не було б комп'ютерів, мобільних телефонів і так далі, я зовсім не хотів сказати, що всі ці чудові речі з'явилися тільки завдяки матаналізу. Зовсім ні. Там велику роль відіграла фізика й технології — узагалі вони і є зірками в цьому шоу. Я просто хочу сказати, що математичний аналіз теж відіграв важливу

роль, щоб ми побачили світ таким, яким він є сьогодні, — хоча він насправді в основному підтримував інші галузі.

Візьміть історію бездротового зв'язку. Усе почалося з того, що Майкл Фарадей і Андре-Марі Ампер відкрили закони електрики й магнетизму<sup>7</sup>. Якби вони кинули спостереження й не возилися з ними, життєво важливі факти про магніти, електричний струм та їхні невидимі силові поля так і лишилися б невідомими, і люди ніколи не змогли б спілкуватися без дротів. Тож очевидно, що тут ніяк не можна було обійтися без експериментальної фізики.

Але так само не можна було обійтися і без матаналізу. У 1860-х шотландський математик-фізик Джеймс Клерк Максвелл надав експериментальним законам електрики й магнетизму символічну форму — з'явилася можливість згодувати їх матаналізу. Він трішки це поварив і видав рівняння, яке не мало жодного сенсу. Вочевидь, чогось у фізиці не вистачало. Максвелл запідозрив, що тут винен закон Ампера. Він спробував це виправити й додав у рівняння новий член — гіпотетичний струм, з яким це протиріччя могло б вирішитися, — і знову кинув на поталу матаналізу. Цього разу він виплюнув зрозумілий результат — просте елегантне рівняння хвилі<sup>8</sup>, дуже схоже на те, яким описують круги на воді. Різниця була в тому, що рівняння Максвелла прогнозувало новий тип хвилі — електричні й магнітні поля в ній виписували елегантні балетні па в парах. Зміна електричного поля сприяла зміні магнітного, а вона, своєю чергою, — зміні електричного і так далі. Одне поле тягнуло за собою інше. Разом вони перетворювалися на рухливу хвилю енергії. А коли Максвелл обчислив швидкість цієї хвилі, він зрозумів — і, мабуть, це був один з найвеличніших моментів про-світлення в історії, — що вона рухається зі швидкістю світла. Тож за допомогою матаналізу він не тільки винайшов електромагнітні хвилі, а й розв'язав загадку століття: яка природа світла? Світло, зрозумів він, — це електромагнітна хвиля.

Після того як Максвелл винайшов електромагнітні хвилі, Генріх Герц у 1887 році довів, що вони справді існують. Через десять років Нікола Тесла створив першу радіокомунікаційну систему, а ще через п'ять — Гульєльмо Марконі передав перші повідомлення

по бездротовому зв'язку через Атлантику. Після цього з'явилося телебачення, мобільні телефони й усе інше.

Ясна річ, що сам по собі матаналіз на це не був здатний. Але так само зрозуміло, що без матаналізу нічого цього не сталося б. Якщо точніше, то інновації могли би з'явитися і без нього, але набагато пізніше — або взагалі їх ніколи б не було.

### Матаналіз: більше, ніж просто мова

В історії Максвелла простежується тема, на яку ми натраплятимемо не раз. Часто можна почути, що математика — мова науки. І в цьому є велика частка правди. У випадку з електромагнітними хвилями, Максвелл першим кроком мав зробити ключове: перекласти виведені експериментальним шляхом закони на мову матаналізу.

Але на цьому аналогія з мовою не закінчується. Матаналіз, як і всі інші форми математики, — це аж ніяк не тільки мова. Це неймовірно потужна система аргументації. За її допомогою ми можемо перетворювати одне рівняння на інше, використовуючи різноманітні символні операції, на які поширюється дія певних правил. У цих правил міцна логічна основа, тож навіть якщо здаватиметься, що ми просто переставляємо туди-сюди символи, — насправді ми будемо довгі логічні ланцюжки. Маніпуляції із символами — це зручне скорочення, надійний спосіб створювати складні аргументи, які ми не можемо повністю втримати в голові.

Якщо нам вистачає везіння й умінь — коли ми правильно перетворюємо рівняння, — вони можуть показати свої приховані потенціальні наслідки. Математик відчуває цей процес практично на дотик. Ми ніби крутимо рівняння, робимо їм масаж, намагаємося максимально розслабити, щоб вони видали свої таємниці. Ми хочемо, щоб вони відкрилися і поговорили з нами.

Тут потрібно проявити творчість — дуже часто буває складно зрозуміти, що саме треба зробити з рівнянням. У Максвелла була нескінченна кількість способів змінити рівняння, і формально всі вони були правильні, але тільки одне перетворення могло спричинити наукове відкриття. Враховуючи, що він навіть не знав, чого

шукав, — він міг від своїх рівнянь легко добитися тільки незв'язного мугикання (або його символного еквівалента). Однак, на щастя, у рівнянь був один секрет. Їх потрібно було правильно підштовхнути — і вони видали рівняння хвилі.

На цьому етапі знову взяла гору лінгвістична функція матаналізу. Коли Максвелл застосував свої абстрактні символи до реальності, він побачив, що електрична й магнітна сила можуть працювати разом — утворювати хвилю невидимої енергії, яка рухається зі швидкістю світла. За кілька десятиліть цей винахід змінить світ.

### Нелогічно ефективний

Є щось паранормальне в тому, як добре матаналіз може вдавати, що він належить до природи — адже це дві дуже різні речі. Матаналіз — вигадана реальність символів і логіки; природа — справжня реальність, із реальними силами й феноменами. Але якимось чином, якщо досить майстерно перекласти реальність мовою символів, логіка матаналізу може створити нове правило реального світу на основі іншого. Уводиш одне правило — отримуєш інше. Почніть із чогось такого, що можна довести експериментальним шляхом і виразити символами (як у Максвелла із законами електрики й магнетизму), зробіть правильні математичні маніпуляції, і отримаєте інше правило, яке можна довести експериментальним шляхом. Можливо, воно буде зовсім нове — такий факт про Всесвіт, про який до цього ніхто не знав (наприклад, існування електромагнітних хвиль). У такий спосіб матаналіз допомагає нам зазирнути в майбутнє і спрогнозувати щось невідоме. Ось чому це такий потужний інструмент у науці й технологіях.

Але чому взагалі Всесвіт має звертати увагу на якусь там логіку, особливо таку, яка під силу нам, крихітним створінням? Цьому чудувався сам Ейнштейн, коли писав: «Зрозумілість цього світу — його найбільша загадка»<sup>9</sup>. Про це писав і Юджин Вігнер в есе «Нелогічна ефективність математики в природничих науках»: «Те, що мовою математики можна формулювати закони фізики, — це чудо, казковий подарунок, якого ми не розуміємо і не заслуговуємо»<sup>10</sup>.

Цей трепет супроводжував нас усю історію математики. Легенда говорить, що Піфагор<sup>11</sup> відчув його ще в 550 році до н.е., коли разом з учнями відкрив, що музикою управляє співвідношення цілих чисел. Уявіть, наприклад, що ви смикаєте гітарну струну. Струна вібрає, і звучить певна нота. Тепер затисніть струну на грифі рівно посередині і смикніть її ще раз. Тепер вібрає тільки половина струни — співвідношення 1 до 2 — і звучить вона рівно на октаву вище, ніж спочатку (октава — музична відстань від однієї до до наступної на шкалі *до-ре-мі-фа-соль-ля-сі-до*). Якщо вібрає  $\frac{2}{3}$  струни, нота підніметься на одну квінту (інтервал від *до* до *соль*; пригадайте перші дві ноти саундтреку із «Зоряних війн»). А якщо  $\frac{3}{4}$  струни, нота піднімається на кварту (інтервал між першими двома нотами в «Маленькій нічній серенаді»). Музиканти Давньої Греції знали про мелодичну концепцію октав, квінт і кварт, і вважали їх прекрасними. Цей неочікуваний зв'язок між музикою (гармонія цього світу) і числами (гармонія вигаданого світу) змусив піфагорійців повірити в містичну ідею: геть *усе* — це числа<sup>12</sup>. Кажуть, вони вірили навіть у те, що музику грають планети на орбітах — музику сфер.

З того часу багато прекрасних математиків і науковців перехворіли на піфагорійську гарячку. В астронома Йоганна Кеплера був дуже серйозний випадок. І у фізика Поля Дірака. Як ми побачимо далі, через цю гарячку вони шукали гармонію Всесвіту, мріяли про неї і жити не могли без цієї ідеї. Зрештою саме тому вони зробили власні відкриття, які змінили світ.

### Принцип нескінченності

Щоб ви розуміли, до чого ми йдемо, я скажу кілька слів про те, що таке матаналіз, чого він хоче (метафорично кажучи) і що його відрізняє від усієї іншої математики. На щастя, у ньому є велика прекрасна ідея, яка його пронизує від початку до кінця. Коли ми зрозуміємо цю ідею, уся структура матаналізу стане на місця, як просто варіації однієї головної теми.

На жаль, на більшості курсів з матаналізу головна тема виявляється похованою під лавиною формул, процедур і фокусів з об-

численням. Я старався, але не зміг пригадати, щоб про неї десь говорили — хоча це частина культури матаналізу, і кожен експерт знає про неї все. Назвемо це «принципом нескінченності». Він нас вестиме цим шляхом, так само як вів сам матаналіз: і по концепціях, і по історії. Дуже хочеться його проголосити просто зараз, але поки вам це буде звучати наче якісь фіглі-міглі. Буде куди легше його оцінити, коли ми буквально на кілька сантиметрів просунемося в бік розуміння того, чого хоче матаналіз... і як він отримує бажане.

Якщо коротко, то матаналіз хоче, щоб складні задачі були простішими. Він просто одержимий простотою. Вас це здивувало, мабуть, — у матаналізу репутація складної штуки. І я не стану сперечатися, що є відомі підручники з цієї теми на понад тисячу сторінок, які важать з цеглину. Але не судімо книжку за обсягом. Матаналіз нічого не вдіє зі своєю масивністю. Він здається складним, тому що намагається розв'язати складні проблеми. І взагалі-то він допоміг розв'язати одні з найскладніших і найважливіших проблем з усіх, з якими стикалося людство.

Таємниця успіху матаналізу криється в тому, що він розбиває складні задачі на менші й простіші підзадачі. Звісно, так робить не тільки матаналіз. Усі, хто добре вміє розв'язувати проблеми, знають, що вони вирішуються куди простіше, якщо їх розкласти на частинки. Але що вирізняє матаналіз, чому в його випадку це дуже радикальний підхід? Він доводить цю стратегію «розділяй і володарюй» до межі, тобто до *нескінченності*. Він не ділить велику задачу на кілька невеликих частин — він невтомно розбиває і розбиває, дробить задачу на найменші з можливих частинки, яких нескінченна кількість. Закінчивши з цим, він вирішує проблему кожної окремої частинки — зазвичай це простіше, ніж розв'язати початкову гігантську задачу. Лишається тільки скласти всі мінівідповіді до купи. Це вже набагато складніше за те, що ми робили до цього, але зазвичай усе одно простіше, ніж розв'язувати всю задачу цілком.

Отже, матаналіз складається з двох етапів: розбити й перебудувати. Якщо сказати математичною мовою, під час першого етапу завжди існує нескінченно мале віднімання, за допомогою якого можна виразити різницю між частинками. Відповідно ця