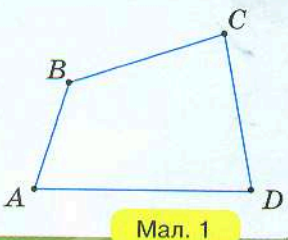
§ 1. ЧОТИРИКУТНИК

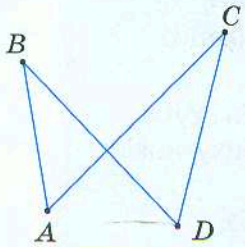
1. ЧОТИРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Позначимо чотири точки, наприклад, A, B, C, D, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Послідовно сполучимо їх відрізками AB, BC, CD, DA, що не перетинаються. Одержали *чотирикутник* $ABCD$ (мал. 1).



Мал. 1

Точки A, B, C, D — *вершини* чотирикутника, відрізки AB, BC, CD, DA — його *сторони*. Кути DAB, ABC, BCD, CDA — це *кути* чотирикутника. Їх позначають й однією буквою: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

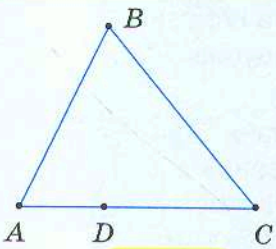


Мал. 2

? Чому фігури, зображені на малюнках 2 і 3, не є чотирикутниками?

У фігурі на малюнку 2 відрізки AC і BD перетинаються, а у фігурі на малюнку 3 точки A, D і C лежать на одній прямій.

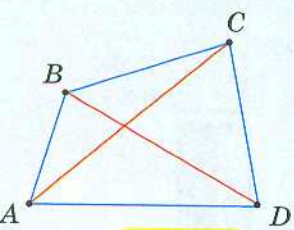
Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини, починаючи з будь-якої. Наприклад, чотирикутник на малюнку 4 можна позначити так: $ABCD$, або $BCDA$, або $CDAB$ і т. д.



Мал. 3

Дві вершини, два кути або дві сторони чотирикутника можуть бути або *сусідніми*, або *протилежними*. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 4) вершини A і D, $\angle A$ і $\angle D$, сторони AD і AB — сусідні, а вершини A і C, $\angle A$ і $\angle C$, сторони AD і BC — протилежні.

Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналями*. На малюнку 4 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.



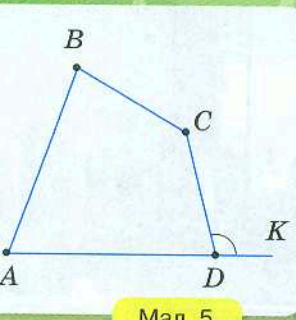
Мал. 4

Кут, суміжний із кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом* чотирикутника.

На малюнку 5 $\angle CDK$ — зовнішній кут чотирикутника при вершині D.

Чотирикутники бувають *опуклі* й *неопуклі*.

Якщо чотирикутник лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини, то він опуклий. На малюнку 6 чотирикутник опуклий, а на малюнку 7 — неопуклий, бо він не лежить з одного боку від прямої, що проходить через вершини M і N.

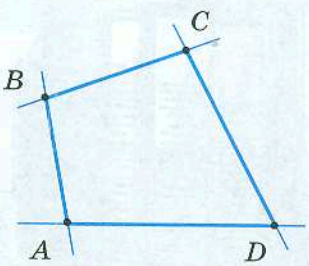


Мал. 5

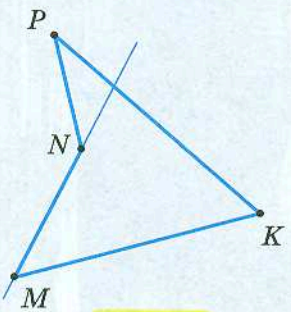
Ми вивчатимемо лише опуклі чотирикутники.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його *периметром*.

Периметр позначають буквою P і коротко записують, наприклад, $P_{ABCD} = 40$ см.



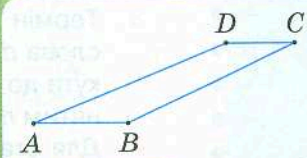
Мал. 6



Мал. 7

Задача. Периметр чотирикутника дорівнює 24 см. Найменша його сторона дорівнює 3 см, а найбільша — 9 см. Одна з двох інших його сторін удвічі менша від другої. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, у якому $CD = 3$ см, $AD = 9$ см, $P = 24$ см (мал. 8). Нехай $AB = x$. Тоді, за умовою, $BC = 2x$. Оскільки $P = 24$ см, то $x + 2x + 3 + 9 = 24$. Звідси $x = 4$. Отже, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см.



Мал. 8

? Чи може чотирикутник мати такі сторони: 1 см, 2 см, 3 см, 6 см? Не може, бо найбільша сторона дорівнює сумі трьох інших.

Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший із чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.

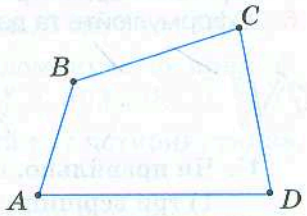
2. ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

Накресліть довільний чотирикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їхня сума?

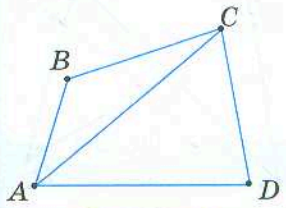
ТЕОРЕМА (про суму кутів чотирикутника).

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Дано: чотирикутник $ABCD$ (мал. 9).
Довести: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.
Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ AC (мал. 10).
Одержали два трикутники — ΔABC і ΔACD.
Тоді $\angle A = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle C = \angle BCA + \angle ACD$.
Звідси:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle BAC + \angle CAD + \angle B + \angle BCA + \angle ACD + \angle D = (\angle BAC + \angle B + \angle BCA) + (\angle ACD + \angle D + \angle CAD) = 180° + 180° = 360°$.



Мал. 9

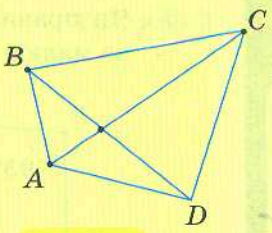


Мал. 10

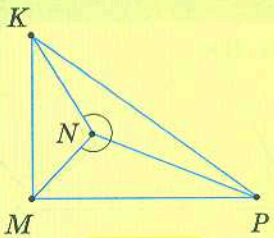
? Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими? Ні, бо тоді сума цих кутів була б меншою від 360°.

Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: *Які відмінні властивості мають опуклі й неопуклі чотирикутники?*
Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ (мал. 11) перетинаються, і кожна з них розбиває його на два трикутники. А діагоналі неопуклого чотирикутника $MNKP$ (мал. 12) не перетинаються, і лише одна з них розбиває його на два трикутники.
Кожний кут опуклого чотирикутника менший від 180°. Якщо чотирикутник неопуклий, то один з його кутів більший за 180°.

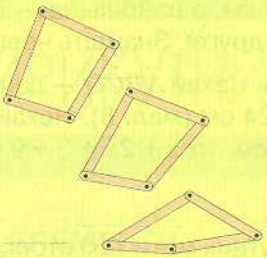


Мал. 11



Мал. 12

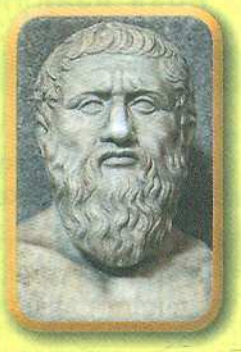
2. На відміну від трикутника, чотирикутник — фігура нежорстка. Якщо взяти чотири планки та з'єднати їх за допомогою шарнірів, то форму одержаного чотирикутника можна змінювати (мал. 13).



Мал. 13

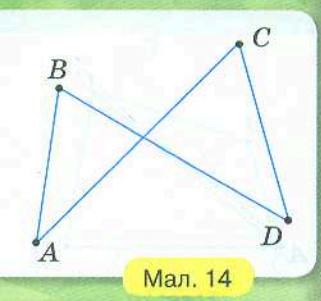
3. Термін «діагональ» походить від грецького слова *diagonios*, що означає «той, що йде від кута до кута». Цей термін став загальноприйнятим лише у XVIII ст.

4. Для стародавніх греків математика була насамперед геометрією. А тому над дверима Академії, де давньогрецький вчений **Платон** (428 р. до н. е. — 348 р. до н. е.) навчав своїх учнів, було зроблено напис: **«Нехай сюди не входить ніхто, хто не знає геометрії».**

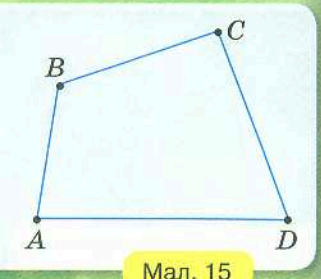


Пригадайте головне

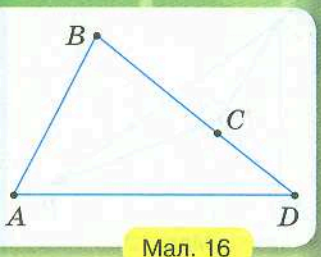
1. Що таке чотирикутник?
2. Як позначають чотирикутник?
3. Що таке діагональ чотирикутника?
4. Що таке зовнішній кут чотирикутника?
5. Що таке периметр чотирикутника?
6. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

Розв'яжіть задачі

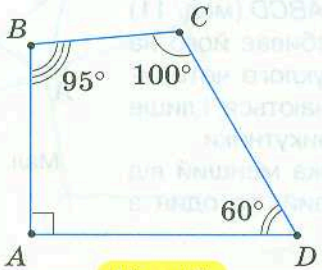
1'. Чи правильно, що в чотирикутнику:
1) три вершини лежать на одній прямій;
2) жодні три вершини не лежать на одній прямій?

2'. Яка з фігур, зображених на малюнках 14–16, є чотирикутником $ABCD$?

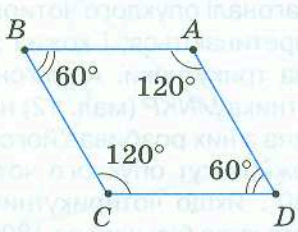
3'. Чи правильно, що зовнішній кут чотирикутника:
1) не суміжний із кутом чотирикутника; 2) суміжний із кутом чотирикутника; 3) вертикальний із кутом чотирикутника?

4'. Яке з наведених тверджень правильне?
Периметр чотирикутника — це сума довжин:
1) трьох його сторін; 2) чотирьох сторін; 3) усіх сторін і діагоналей.

5'. Чи правильно вказано градусну міру кутів чотирикутника $ABCD$ на малюнках 17, 18? Відповідь поясніть.



Мал. 17



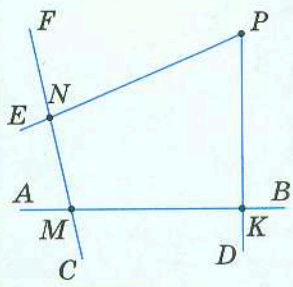
Мал. 18

6°. Назвіть зображені на малюнку 19 зовнішні кути чотирикутника $MNPK$ при вершині:
1) N; 2) M; 3) K.

7°. a, b, c, d — сторони чотирикутника, P — його периметр. Знайдіть невідомі величини за таблицею 1.

Таблиця 1

a	8 см	10 см	5 см	23 см	
b	12 см	25 см	13 см		16 см
c	16 см	30 см		30 см	20 см
d	18 см		17 см	35 см	24 см
P		90 см	60 см	115 см	74 см



Мал. 19

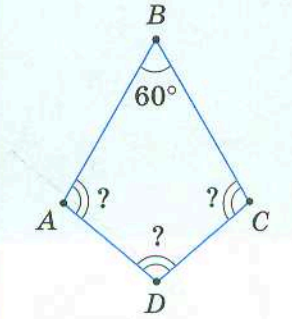
8°. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 140 см, а одна з його сторін у 9 разів менша від кожної з інших.

9°. Периметр чотирикутника дорівнює 210 см, а одна з його сторін у 2 рази менша від кожної з інших. Знайдіть сторони чотирикутника.

10°. Чи може чотирикутник мати такі сторони:
1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см; 2) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см?

11°. Чи може чотирикутник мати такі сторони: 2 см, 3 см, 5 см, 10 см?

12°. За даними на малюнках 20 і 21 визначте невідомі кути чотирикутника $ABCD$.



Мал. 20

13°. За даними на малюнку 22 визначте невідомий кут чотирикутника $ABCD$.

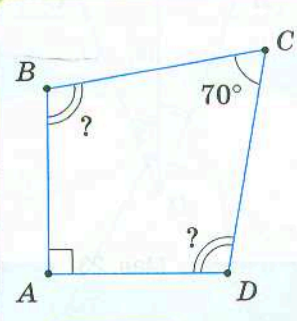
14°. Знайдіть невідомий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) 120°, 80°, 100°; 2) 70°, 130°, 90°.

15°. Три кути чотирикутника дорівнюють 60°, 100° і 50°. Знайдіть його четвертий кут.

16°. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
1) 55°, 75°, 100°, 80°; 2) 145°, 85°, 70°, 65°?

17°. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
160°, 95°, 45°, 60°?

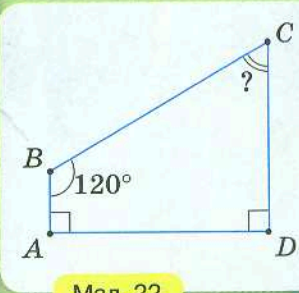
18°. За даними таблиці 2 знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.



Мал. 21

Таблиця 2

$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° + 10°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 20°$	$n° + 20°$	$2n°$
$\angle C$	$3n°$	$n° - 10°$	$n° + 30°$	$n°$
$\angle D$	$4n°$	$n°$	$n°$	$5n°$



Мал. 22

19°. Чи можуть усі кути чотирикутника бути тупими? Відповідь поясніть.

20°. Усі кути чотирикутника рівні. Знайдіть їх.