§ 1. Раціональні вирази

1. Раціональні дроби

ПОЯСНЕННЯ

Областю допустимих значень раціонального виразу є усі значення невідомих, при яких вираз має зміст.
Для визначення допустимих значень змінних, що входять до раціональних дробів, треба знайти такі їх значення, при яких знаменник дробу не буде дорівнювати нулю.

Модулем, або абсолютною величиною x, є невід'ємне число, яке позначають $|x|$. Модулю можна дати таке визначення: якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$; якщо $x < 0$, то $|x| = -x$.
Модуль — це відстань від початку відліку до заданої точки. На координатній прямій відстань вимірюємо в одиничних відрізках, які можна відкласти праворуч або ліворуч від 0.

Величина дробу не зміниться, якщо чисельник та знаменник помножити на одне й те саме число. Це часто використовують при зведенні дробів до спільного знаменника, що необхідно при додаванні та відніманні дробів з різними знаменниками.
Величина дробу також не зміниться, якщо чисельник та знаменник розділити на одне й те саме число. Цей процес називають ***скороченням дробу***.
Скоротити дроби можна лише в тому випадку, якщо чисельник та знаменник мають однакові дільники. Скорочувати дріб можна поступово або одразу на найбільший спільний дільник.

Одночленом називають добуток двох або кількох множників, кожен з яких є числом або буквою. Наприклад: $3ad$, $25c^2$, $-8abc$. Одночлени називають ***подібними***, якщо вони однакові або розрізняються лише числовими коефіцієнтами. Наприклад: $5xy$, $74xy$, $-xy$ — подібні, $6ad$, $22a$, $-b$ — не є подібними.
Таким чином, зведення подібних членів та винесення за дужки спільного множника, фактично, одне й те саме.
Суму одночленів називають ***многочленом***. Для роботи з ними часто використовують формули скороченого множення.
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
7. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Важливо пам'ятати, що $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$, а $a^3 \pm b^3 \neq (a \pm b)^3$.

Будь-яка правильна числова рівність, а також будь-яка буквена рівність, справедлива при всіх числових значеннях букв, які входять у неї, називаються ***тотожностями***.

1. а) Цілі вирази: $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$; $\frac{1}{6}m^8n^5$; $\frac{n^2 - 3mn}{18}$.

б) Дробові вирази: $\frac{3a^2}{4b^8}$; $\frac{8}{6n+1}$; $3a - \frac{b^2}{c^4}$; $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$; $\frac{x-2}{x+2}$; $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$.

в) Раціональні дроби: $\frac{8}{6n+1}$; $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$; $\frac{x-2}{x+2}$; $\frac{m^2 - 3mn}{18}$.

2. 1) Якщо $c = -3$, то $\frac{(-3)^2 - 4\cdot(-3)}{2\cdot(-3)+1} = \frac{9+12}{-6+1} = \frac{21}{-5} = -4,2.$

2) Якщо $c = 0$, то $\frac{0^2 - 4\cdot 0}{2\cdot 0+1} = \frac{0}{1} = 0.$

3. 1) Якщо $m = -1$, $n = 1$, то $\frac{2\cdot(-1)-1}{3\cdot(-1)+2\cdot 1} = \frac{-2-1}{-3+2} = \frac{-3}{-1} = 3.$

2) Якщо $m = 4$, $n = -5$, то $\frac{2\cdot 4-(-5)}{3\cdot 4+2\cdot(-5)} = \frac{8+5}{12-10} = \frac{13}{2} = 6,5.$

4. 1) При $a = -4$, $\frac{(-4)^2-1}{(-4)-5} = \frac{16-1}{-9} = \frac{15}{-9} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}.$

2) При $x = -5$, $y = 6$, $\frac{-5+3}{6} - \frac{6}{-5+2} = \frac{-2}{6} - \frac{6}{-3} = -\frac{1}{3} + 2 = 1\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}.$

5. 1) $2x - 5$, вираз є цілим, тому має зміст при всіх значеннях змінної x.

2) $\frac{18}{m}$, вираз має зміст при всіх значеннях m, крім $m = 0$.

3) $\frac{9}{x-5}$, $x - 5 = 0$, $x = 5$, тому вираз має зміст при всіх x, крім $x = 5$.

4) $\frac{x-5}{9}$, вираз є цілим, тому має зміст при всіх значеннях змінної x.

5) $\frac{2+y}{1+y}$, $1 + y = 0$, $y = -1$, вираз має зміст при всіх y, крім $y = -1$.

6) $\frac{1}{x^2+4}$, $x^2 + 4 = 0$, $x^2 = -4$, рівняння коренів не має, тому вираз має зміст при всіх значеннях x.

7) $\frac{5}{x^2-4}$, $x^2 - 4 = 0$, $(x - 2)(x + 2) = 0$, $x - 2 = 0$ або $x + 2 = 0$, $x = 2$, $x = -2$. Вираз має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 2$ та $x = -2$. Отже, допустимими значення є всі значення x, крім -2 і 2.

8) $\frac{5}{|x|-4}$, $|x| - 4 = 0$, $|x| = 4$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. Вираз має зміст при всіх значеннях x, крім 4 і -4.

9) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}$, $x - 2 = 0$, $x = 2$; $x + 1 = 0$, $x = -1$. Перший дріб має зміст при всіх x, крім $x = 2$; другий дріб — при всіх x, крім $x = -1$. Отже, допустимими значеннями виразу є всі числа, крім 2 і -1.

10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$, $x(x - 6) = 0$, $x = 0$ або $x - 6 = 0$, $x = 0$, $x = 6$.

Вираз має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 0$ та $x = 6$. Отже, допустимими значеннями є всі числа, крім 0 та 6.

11) $\frac{x}{|x|+1}$, $|x| + 1 = 0$, $|x| = -1$, коренів немає. Отже, вираз має зміст при всіх значеннях x, тому допустимими значеннями виразу є всі значення x.

12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$, $(x - 3)(x + 5) = 0$; $x - 3 = 0$ або $x + 5 = 0$; $x = 3$ або $x = -5$. Допустимими значеннями x є всі числа, крім 3 та -5.

6. 1) $\frac{9}{y}$, вираз має зміст при всіх значеннях y, крім $y = 0$.

2) $\frac{x+7}{x+9}$; $x + 9 = 0$, $x = -9$, тому вираз має зміст при всіх значеннях x, крім $x = -9$.

3) $\frac{m-1}{m^2-9}$; $m^2 - 9 \neq 0$, $(m - 3)(m + 3) \neq 0$, $m - 3 = 0$ або $m + 3 = 0$, вираз має зміст при всіх значеннях m, крім $m = 3$, $m = -3$.

4) $\frac{x}{|x|-3}$, $|x| - 3 = 0$, $|x| = 3$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Вираз має зміст при всіх значеннях x, крім $x = -3$, $x = 3$.

5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$; $x - 8 = 0$ та $x - 1 = 0$; $x_1 = 8$, $x_2 = 1$. Вираз має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 8$, $x = 1$.

6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$; $(x + 2)(x - 10) = 0$; $x + 2 = 0$ або $x - 10 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 \neq 10$.

7. Щоб записати дріб відповідно до умови задачі, необхідно записати дріб із будь-яким чисельником та знаменником, який дорівнює «0» при заданому значенні x.

Наприклад: 1) $\frac{1}{x-7}$; $\frac{2x+3}{3x-21}$; $\frac{x^2-16}{1{,}5x-10{,}5}$; 2) $\frac{1}{x+1}$; $\frac{6x-5}{2x+2}$; 3) $\frac{1}{x(x-4)}$; $\frac{3x+5}{x}+\frac{6}{x-4}$.

Задача має безліч розв'язків.

8. 1) $\frac{1}{y-5}$; 2) $\frac{1}{y+2}=\frac{2}{y}$; 3) $\frac{5}{y^2-9}-\frac{7}{6-y}$; 4) $\frac{2y+3}{x^2+1}$.

9. $\frac{a}{75}$ год автомобіль їхав по шосе; $\frac{b}{40}$ год автомобіль їхав по ґрунтовій дорозі.

На весь шлях він витратив $\frac{a}{75}+\frac{b}{40}$ год.

Якщо $a = 150$, $b = 20$, то $\frac{150}{75}+\frac{20}{40}=2+\frac{1}{2}=2{,}5$ год.

10. По 8 грн учень придбав $\frac{m}{8}$ зошитів та по 14 грн — $\frac{n}{14}$ зошитів. Всього він придбав $\frac{m}{8}+\frac{n}{14}$ зошитів. Якщо $m = 24$, $n = 56$, то $\frac{24}{8}+\frac{56}{14}=3+4=7$ зошитів.

11. 1) $\frac{1}{x^2}$; x — будь-яке число, крім 0; $x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$;

2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}=\frac{x^2+1}{-(x^2-6x+9)}=-\frac{x^2+1}{(x-3)^2}$; x — будь-яке число, крім $x = 3$. $x^2 \geq 0$, $x^2 + 1 > 0$, $(x - 3)^2 > 0$. Частка двох додатних чисел — додатне число.

12. 1) $\frac{-x^2}{x^2+15}$, x — будь-яке число, $x^2 \geq 0$, $-x^2 \leq 0$, $x^2 + 5 > 0$, отже частка невід'ємного і додатного чисел недодатна;

2) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$, x — будь-яке, крім $x = 1$. $(x + 2)^2 \geq 0$, $(x - 1)^2 > 0$, частка цих чисел невід'ємна.

13. $5x - 15y = 1$, $5(x - 3y) = 1$, $x - 3y = 1 : 5$; $x - 3y = 0{,}2$.

1) $x - 3y = 0{,}2$; 2) $\dfrac{8}{2x-6y}=\dfrac{4\cdot 2}{2(x-3y)}=\dfrac{4}{0{,}2}=20$;

3) $\dfrac{18y-6x}{9}=\dfrac{-6(x-3y)}{9}=-\dfrac{2\cdot 0{,}2}{3}=-\dfrac{0{,}4}{3}=-\dfrac{4}{30}=-\dfrac{2}{15}$;

4) $\dfrac{1}{x^2-6xy+9y^2}=\dfrac{1}{(x-3y)^2}=\dfrac{1}{0{,}2^2}=\dfrac{1}{0{,}04}=25$.

14. $4a + 8b = 10$, $4(a + 2b) = 10$, $a + 2b = 10 : 4$, $a + 2b = 2{,}5$.

1) $2b + a = 2{,}5$;

2) $\dfrac{5}{a+2b}=\dfrac{5}{2{,}5}=\dfrac{50}{25}=2$;

3) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}=\dfrac{(a+2b)^2}{2(a+2b)}=\dfrac{2{,}5^2}{2\cdot 2{,}5}=\dfrac{2{,}5}{2}=1{,}25$.

15. Область визначення функції — це всі значення, яких може набувати x.

1) $y=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{x}}$; $4-\dfrac{4}{x}=0$; $\dfrac{4}{x}=4$, $x = 1$. Область визначення — всі значення x, крім $x = 1$, $x = 0$.

2) $y=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$; $x-\dfrac{1}{x}=0$; $\dfrac{1}{x}=x$; $x^2 = 1$; $x = -1$ або $x = 1$. Область визначення — всі значення x, крім $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$.

16. 1) $\dfrac{x}{x-\dfrac{9}{x}}$; $x-\dfrac{9}{x}=0$; $\dfrac{9}{x}=x$; $x^2 = 9$. Вираз має зміст при всіх x, крім $x = -3$, $x = 3$, $x = 0$.

2) $\dfrac{10}{2+\dfrac{6}{x}}$; $2+\dfrac{6}{x}=0$; $\dfrac{6}{x}=-2$; $x = -3$. Вираз має зміст при всіх x, крім $x = -3$, $x = 0$.

17. 1) $\dfrac{5}{15}=\dfrac{5:5}{15:5}=\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{27}{45}=\dfrac{3}{5}$; 4) $\dfrac{30}{48}=\dfrac{5}{8}$.

18. 1) $\dfrac{3^{\backslash 2}}{7}=\dfrac{6}{14}$; 2) $\dfrac{8^{\backslash 4}}{15}=\dfrac{32}{60}$.

19. 1) $a^5a^3 = a^8$; 2) $(a^5)^3 = a^{15}$; 3) $a^5 : a^3 = a^2$; 4) $(a^3)^4 : (a^2)^3 = a^{12} : a^6 = a^6$.

> **ПОЯСНЕННЯ**
>
> При розкладанні многочлена на множники використовуйте один із трьох способів:
> 1) винесення спільного множника за дужки;
> 2) використання формул скороченого множення;
> 3) спосіб групування.
>
> Якщо необхідно застосувати декілька способів, то першою дією винесіть спільний множник за дужки.