Розділ 1

Раціональні вирази

У цьому розділі ви:
- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу та основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу, раціонального рівняння; з функцією $y = \frac{k}{x}$, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа;
- **навчитеся** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами; розв'язувати раціональні рівняння.

§1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

У курсі алгебри 7 класу ви вже знайомилися із ***цілими раціональними виразами***, тобто з виразами, що не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p + l}{4}.$$

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p + l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x + 2}{y - 9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}; \quad \frac{1}{(x - y)(x^2 + 7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають ***дробовими раціональними виразами***.

Цілі раціональні і дробові раціональні вирази називають ***раціональними виразами***.

Раціональні вирази **— це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня із цілим показником.**

Раціональний вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q – вирази, що містять числа або змінні, називають ***дробом.*** Вираз P є його чисельником, а Q – знаменником.

Якщо чисельник і знаменник дробу – многочлени, то дріб називають ***раціональним дробом.***

Цілий раціональний вираз має зміст при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Розглянемо дробовий раціональний вираз $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x, крім $x = 3$, оскільки при $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому випадку кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст при всіх значеннях змінної x, крім $x = 3$ (або при $x = 3$ не має змісту).

Значення змінних, при яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями змінних* у виразі.

Ці значення утворюють ***область визначення виразу***, або ***область допустимих значень змінних*** у виразі.

Приклад 1. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{m-3}{9}$; 2) $\frac{5}{p+2}$; 3) $\frac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\frac{7}{|y|-3}$.

Розв'язання. 1) Вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної m. 2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2, оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль. 3) Знаменник дробу $\frac{x+7}{x(x-9)}$ перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9. 4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3.

Скорочено *відповіді* можна записати так: 1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Розглянемо *умову рівності дробу нулю.* Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то можна прийти до висновку, що дріб $\frac{P}{Q}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник P дорівнює