

О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Підручник для загальноосвітніх
навчальних закладів

Академічний рівень

*Схвалено науково-методичною комісією
з математики Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки,
молоді та спорту України*



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
А94

*Схвалено науково-методичною комісією
з математики Науково-методичної ради
з питань освіти Міністерства освіти і науки,
молоді та спорту України
(лист №1.4/18-Г-52 від 02.02.2011 р.)*

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Геометрія. 10 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних за-
кладів. Академічний рівень. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан,
2011. — 448 с.

ISBN 978-966-10-0830-3

Пропонований підручник відповідає чинній програмі з математики для 10-го класу академічного рівня загальноосвітньої школи. Він спрямований на забезпечення готовності учнів широко і свідомо застосовувати геометрію при описанні об'єктів навколишнього світу. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

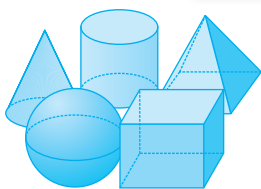
Для учнів класів академічного рівня і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу авторів чи видавництва*

© Афанасьєва О.М., Бродський Я.С.,
Павлов О.Л., Сліпенко А.К., 2011
© Навчальна книга – Богдан, макет,
художнє оформлення, 2011

ISBN 978-966-10-0830-3



! Звернення до читача

Дорогий юний друже!

Навчання у старших класах пов'язане із розв'язанням надскладної задачі: вибором професії, сфери майбутньої діяльності, підготовкою до навчання за обраним напрямом. Оволодіння математикою старшої школи допоможе Вам у її розв'язанні. Математика здатна допомогти, як кажуть, і розум у порядок привести, і світ пізнати.

Загальновизнано, що геометрія є одним з найкращих засобів розвитку розумових здібностей, вміння логічно міркувати і робити правильні висновки. Крім того, геометрія також допомагає орієнтуватись у навколишньому середовищі. Особливе значення має ця наука для майбутніх інженерів, техніків, науковців, кваліфікованих робітників, бо хоча й на уроках геометрії йдеться здебільшого про «абстрактні» об'єкти, цілком реальними і застосовними є властивості цих об'єктів для опису (моделювання) предметів і явищ навколишнього світу.

Вивчаючи планіметрію, Ви, мабуть, звернули увагу на певну обмеженість її моделюючих можливостей. Вона допомагає, наприклад, обчислити площу поверхні стін кімнати, але при визначенні місткості посудини зарадити вже не зможе. Річ у тім, що посудина краще моделюється **просторовою** геометричною фігурою. Саме властивості просторових фігур вивчаються в курсі **стереометрії**, одному з розділів геометрії.

Перед Вами підручник стереометрії для 10 класу. Його головне призначення полягає у наданні Вам допомоги в оволодінні геометрією простору, її застосуваннями до опису просторових форм і відношень між ними, розвитку просторового і логічного мислень.



Підручник складається зі вступу, трьох розділів і матеріалів для підготовки до підсумкового оцінювання з геометрії за 10 клас.

Вступ дає уявлення про розвиток геометрії, її роль у пізнанні навколишнього світу.

Розділи підручника поділено на параграфи. Запис 2.4 означає другий розділ, параграф 4.

Перший розділ присвячено повторенню і систематизації понять, фактів і методів планіметрії, які Ви вивчали у 7 – 9 класах. Тому викладення навчального матеріалу в ньому суттєво відрізняється від наступних розділів.

Викладення навчального матеріалу у кожному параграфі двох наступних розділів поділено на три частини. У першій частині (її позначено літерою **Б**) викладаються головні поняття і факти, іноді без формальних обґрунтувань, за аналогією, на основі спостережень, шляхом узагальнення тощо. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного. Тому природним є і його символічне позначення – перша сходинка засвоєння теми.

У другій частині (її позначено літерою **О**) забезпечується перехід на другу сходинку засвоєння теми: завершується обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення і поглиблення. Матеріал, викладений у перших двох частинах, повністю забезпечує оволодіння геометрією відповідно до вимог програми на академічному рівні навчання. Третя частина параграфа (її позначено літерою **П**) розрахована на учнів, орієнтованих на поглиблене вивчення геометрії, схильних до роздумів та досліджень.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням задач і прикладів. Як правило, твердження, що містяться у задачах, мають характер теорем і застосовуються при розв'язанні задач, які пропонуються учням для самостійної роботи. Приклади мають ілюстративний характер, надають зразки розв'язання типових задач. Початок і кінець доведень теорем, а також розв'язань прикладів і задач позначено знаками \square і \blacksquare .

Означення основних понять виділено синім кольором, формулювання тверджень — напівжирним шрифтом. Важливі зауваження відзначено знаком оклику.

Кожна з вказаних частин навчального матеріалу завершується запитаннями для самоконтролю і завданнями певного характеру: вправами на рисунках, графічними вправами і дослідницькими завданнями. Вони мають забезпечити свідоме засвоєння понять і фактів у їхньому взаємозв'язку, підготувати до розв'язання задач.

3. Визначте, чим є переріз фігури площиною, що проходить через дані три точки, зображені на рис. 245, а)–г) і рис. 246, а)–г).

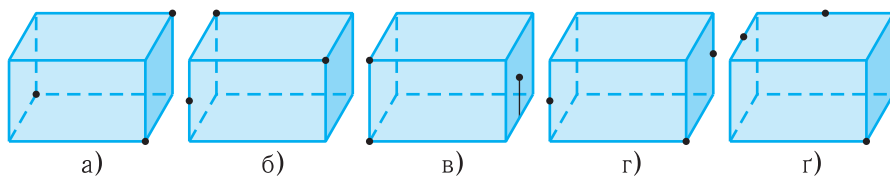


Рис. 245

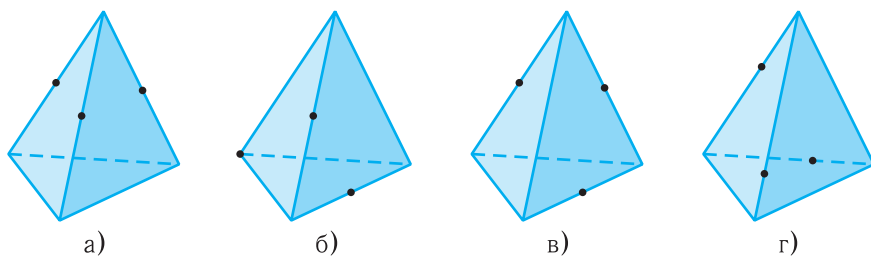


Рис. 246



Наведену ознаку паралельності площин іноді зручніше використовувати у дещо іншій формі.

Теорема 6.1'

(ознака паралельності площин).

Якщо дві перетинні прямі однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини — паралельні.

Користуючись ознакою паралельності прямої і площини (теорема 5.1), неважко встановити, що з умови теореми 6.1' випливає умова теореми 6.1. Застосування теореми, оберненої до ознаки паралельності прямої і площини (теорема 5.2), завершує обґрунтування еквівалентності умов теорем 6.1 і 6.1'.

Природно, постає питання про однозначність наведеної у задачі 1 побудови. Оскільки нам доведеться не раз скористатися цією властивістю, то виділимо її як окрему теорему. Проте спершу розглянемо інше твердження.

Теорема 6.2

(про перетин двох паралельних площин третьою).

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то лінії перетину площин є паралельними.

□ Нехай дано паралельні площини α , β і площину γ , що їх перетинає (рис. 247). Позначимо лінії перетину через a і b . Ці прямі лежать у площині γ і не перетинаються, оскільки площини α і β не мають спільних точок. Тому прямі a і b — паралельні. ■

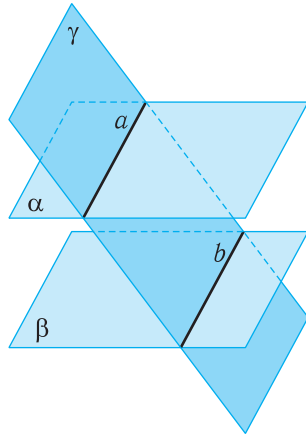


Рис. 247

Теорема 6.3

(про існування та єдиність площини, паралельної даній).

Через точку, розміщену поза даною площиною, можна провести єдину площину, паралельну даній.

□ Побудову такої площини виконано у задачі 1. Однозначність побудови доведемо методом від супротивного. Припустимо, що через точку M проведено дві різні площини α і γ , паралельні площині β (рис. 248), і пряма m — лінія їхнього перетину. Проведемо через точку M площину δ , яка перетинається з прямою m і площиною β (як це можна зробити?). Позначимо через a і b лінії перетину площини δ з площинами α і γ , а через c — лінію перетину площин δ і β (рис. 248). Згідно з теоремою 6.2, $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Тобто в площині δ через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій c . Суперечність свідчить про неправильність припущення. ■

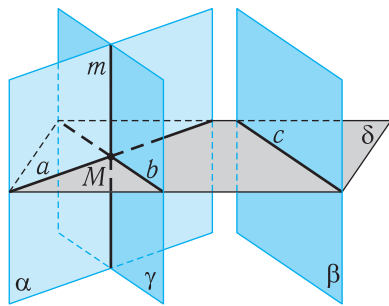
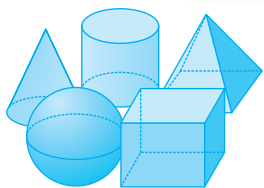


Рис. 248

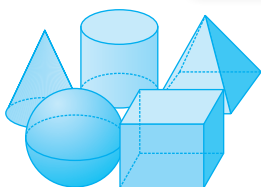
Відношення паралельності площин має ряд властивостей, які мають аналоги в планіметрії.

429. 1) 60° ; 2) 60° ; 3) перпендикулярні; 4) $\arctg 2\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$. см. **431. Вказівки:** 1) використайте властивості середньої лінії трапеції; 2), 3) розгляньте спочатку плоску ситуацію. **432.** 90° . **433.** 1) 30° ; 2) 150° ; 3) $\angle ABC$ — менший; 4) $2\sqrt{5 \mp 2\sqrt{3}}$ см; 5) $\frac{2}{\sqrt{5 \mp 2\sqrt{3}}}$ см. **434.** 1) 90° ; 2) 45° ; 3) 45° ; 4) 90° . **435.** $\frac{c}{6}$.
- 436.** a ; $2a$; $\frac{a}{2}\sqrt{11}$; $\frac{a}{2}\sqrt{5}$; **вказівка:** врахуйте, що йдеться про відстань від точки до відрізка, а не до прямої, що проходить через цей відрізок; 2) $\arctg \frac{4}{3\sqrt{3}}$; $\arctg \frac{4}{\sqrt{3}}$; 3) $\arccos \frac{3}{2\sqrt{33}}$. **437. Вказівка:** скористайтесь тим, що серединні перпендикуляри до сторін трикутника паралельні відповідним висотам. **438. Вказівка:** скористайтесь серединою хорди, паралельної даному діаметру. **439. Вказівка:** центр лежить на перетині осі симетрії трапеції та серединного перпендикуляра до бічної сторони. **440. Вказівка:** йдеться про узагальнення прикладу 5 із розділу 2, п. 2.2. **441.** 60° . **442.** Ні; **вказівка:** з'ясуйте, за якої умови прямиї кут ортогонально проектується в прямиї. **443. Вказівка:** доведіть, що точка M ортогонально проектується в центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола. **444.** 1) $AB \perp BB_1C$, $ABB_1 \perp ADD_1$; 2) $\frac{b}{a\sqrt{2}}$; 3) $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\arctg \frac{b\sqrt{2}}{a}$; $\arctg \frac{a}{\sqrt{2}b}$; $\arctg \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$. **445.** 30° . **446.** 1) Паралельні; паралельні; 3) 1:1. **447. Вказівка:** якщо a , b , c — довжини вказаних відрізків, то, за теоремою Піфагора, квадрати сторін $\triangle ABC$ дорівнюють $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$, $c^2 + b^2$. Далі перевірте, що квадрат довільної сторони менший від суми квадратів двох інших сторін. **448.** $\sqrt{31}$. **449. Вказівка:** спроектуйте пряму SC на площину ASB . **450.** $BD_1 = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$. **451. Вказівка:** спроектуйте ортогонально тетраedr на площину грані. **452.** $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0° . **453. Вказівка:** доведіть, що точка O збігається з основою перпендикуляра, проведеного з точки S на площину ABC . **454. Вказівка:** доведіть, що M_1M_2 паралельна середній лінії трикутника ABC і скористайтесь транзитивністю відношення паралельності. **455.** $\sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \pm lm$.



Предметний покажчик

- Аксіоми стереометрії 94
- Бісекторна площина 407
- Бічна грань піраміди 97
- Вершина многогранника 96
- « піраміди 97
 - « тетраедра 97
- Відстань між фігурами 363
- Вісь обертання 262
- « симетрії 262
- Грань двогранного кута 398
- « многогранника 96
 - « тетраедра 97
 - « паралелепіпеда 96
- Двогранний кут 390
- Діагональ паралелепіпеда 174
- Еліпс 150
- Ешпор 336
- Зображення фігури 171
- Куб 96
- Куля 97
- Кут між площинами 389
- « « прямими 386
 - « « прямою і площиною 387
 - « « мимобіжними прямими 390
- Лінійний кут двогранного кута 399
- Мимобіжні прямі 118
- Многогранник 96
- Напрямок проектування 144
- Ортогональне проектування 326
- Основа перпендикуляра 343
- Осьова симетрія 262
- Паралелепіпед 96
- Паралельна проекція точки на площину 144
- « « фігури на площину 145
- Паралельне проектування 144
- Паралельні площини 217
- « пряма і площина 194
 - « прямі 118
- Перпендикуляр до площини 343
- Переріз 106
- Перпендикулярність площин 301
- « прямих 253
 - « прямої і площини 253
- Піраміда 97
- Площина проєкцій 144
- Поворот навколо осі 262
- Похила до площини 343
- Проектуючі площини 145
- « прямі 145
- Проекція точки (фігури) на площину 144
- « похилої 343
- Ребро двогранного кута 398
- « многогранника 96
- Січна площина 106
- Симетрія відносно площини 329
- « просторової фігури 329
 - « осьова 262
- Суміжні грані паралелепіпеда 174
- Сфера 355
- Тетраедр 97
- Фігура 93
- Центральне проектування 143



Зміст

| | |
|--|-----|
| Звернення до читача | 3 |
| Вступ | 7 |
| РОЗДІЛ 1. Основні факти і методи планіметрії | |
| 1.1. Аксиоми планіметрії | 20 |
| 1.2. Паралельність і перпендикулярність прямих | 24 |
| 1.3. Геометрія трикутника | 30 |
| 1.4. Геометрія чотирикутників | 49 |
| 1.5. Геометрія кіл | 56 |
| 1.6. Площі фігур | 65 |
| 1.7. Методи розв'язування планіметричних задач | 72 |
| Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Основні факти і методи планіметрії» | 85 |
| РОЗДІЛ 2. Паралельність прямих і площин | |
| 2.1. Основні поняття й аксиоми стереометрії | 92 |
| 2.2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі | 117 |
| 2.3. Паралельне проектування | 143 |
| 2.4. Зображення фігур у стереометрії | 170 |
| 2.5. Паралельність прямих і площин | 193 |
| 2.6. Паралельність площин | 216 |
| Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Паралельність прямих і площин» | 239 |
| РОЗДІЛ 3. Перпендикулярність прямих і площин | |
| 3.1. Перпендикулярність прямої і площини | 252 |
| 3.2. Зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин | 277 |
| 3.3. Перпендикулярність площин | 300 |
| 3.4. Ортогональне проектування | 326 |
| 3.5. Перпендикуляр і похила | 343 |
| 3.6. Вимірювання відстаней у просторі | 362 |
| 3.7. Вимірювання кутів у просторі | 385 |
| Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Перпендикулярність прямих і площин» | 416 |
| Готуємось до підсумкового оцінювання | 427 |
| Відповіді і вказівки до задач | 434 |
| Предметний покажчик | 446 |



Навчальне видання

АФАНАСЬЄВА Ольга Миколаївна
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович
ПАВЛОВ Олександр Леонідович
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинівич

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Підручник

**для загальноосвітніх
навчальних закладів**

Академічний рівень

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 16.02.2011. Формат 60×90/16. Папір офсетний.

Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.

Умовн. друк. арк. 28. Умовн. фарбо-відб. 56.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008

тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70

publishing@budny.te.ua www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-0830-3



9 789661 008303