

БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ  
МАТЕМАТИКА

**І.М. Гельфанд**  
**О.Г. Глаголева**  
**О.О. Кирилов**

# МЕТОД КООРДИНАТ

*Переклад з російської, передмова,  
примітки та загальна редакція  
В.О. Тадеєва*



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 514.122+37.018.43  
ББК 22.1  
Г32

*Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року  
Редактор серії В.О. Тадеєв*

**Гельфанд І.М., Глаголева О.Г., Кирилов О.О.**  
Г32    Метод координат. Навч. пос. / Пер. з рос. і заг. ред. В.О. Тадеєва. —  
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 216 с.: іл. (Бібліотечка  
фізико-математичної школи. Математика).

ISBN 978-966-10-1909-5

Книга «Метод координат» є посібником для навчання школярів, що виявляють підвищений інтерес до математики.

Виклад матеріалу у ній проводиться від найпростіших, відомих навіть молодшим школярам речей (координати точки на прямій) і доводиться до поняття про чотирирівимірний простір та деякі його властивості.

Книга містить велику кількість задач різного рівня складності. Вона відображає майже 50-річний досвід роботи з учнями заочних математичних шкіл і розрахована насамперед на учнів 7–10 класів для впорядкування їхньої самостійної роботи з математики. Однак буде корисною і вчителям середніх та старших класів при проведенні ними факультативних занять і при підготовці до уроків з відповідних тем. Простота та ясність викладу роблять книгу доступною для всіх охочих самостійно займатися математикою.

Із 60-х років ХХ ст. по даний час книга витримала шість видань масовими тиражами російською мовою, неодноразово видавалася англійською мовою та іншими іноземними мовами і фактично стала класичною у своєму жанрі. Українською мовою виходить уперше.

ББК 22.1

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)  
ISBN 978-966-10-1909-5

© Навчальна книга – Богдан,  
майнові права, 2011

## МАЛЕНЬКА КНИЖЕЧКА ВЕЛИКИХ РОМАНТИКІВ (Передмова редактора українського видання)

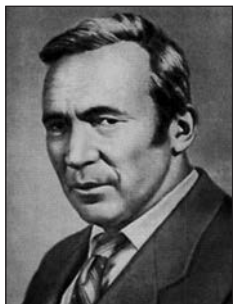
Давно підмічено, що книги, які ми читаємо в дитинстві, великою мірою визначають усе наше подальше життя. У далекі вже 70-ті роки минулого століття авторів цих рядків, тодішньому учневі заочної математичної школи (ЗМШ), довелося опрацювати книжечку «Метод координат», яка була одним з основних навчальних посібників у цій школі. Це дало неоціненний досвід самостійної цілеспрямованої навчальної роботи. Немає жодних сумнівів, що й теперішньому учневі ця книжечка, як і інші книжечки з даної «золотої серії», принесуть чимало користі.

Виняткова особливість цих книжечок — неповторний дух піднесеності й романтизму, що витає над їхніми сторінками, нагадуючи про епоху, коли вони були створені. Початок 60-х років ХХ ст.: хрущовська відлига, романтика великих новобудов, феноменальні досягнення радянських математиків і фізиків, грандіозні успіхи в освоєнні Космосу ...

На цьому тлі таким природним було відкриття у 1963 р. при чотирьох найбільших університетах тодішнього СРСР — Московському, Ленінградському, Київському і Новосибірському — спеціалізованих фізико-математичних шкіл-інтернатів (ФМШ). Ініціаторами виступили провідні тогочасні радянські учені — академіки О.Д. Александров, П.С. Александров, С.Т. Беляєв, В.М. Глушков, А.М. Колмогоров, І.К. Кікоїн, М.О. Лаврентьев, І.Г. Петровський та ін. Зараз цим нікого не здивувати, школи (ліцеї, гімназії) під егідою вищих навчальних закладів — явище звичне, а тоді, коли вся радянська освіта керувалася принципами єдиної загальноосвітньої трудової політехнічної школи і всебічного та гармонійного розвитку особистості, добитися такої вузької спеціалізації потребувало великої енергії.

Натхненники проекту залучали до його реалізації багатьох професійних математиків, які дієво сприяли розвитку шкільної освіти. Природно, що така пропозиція надійшла й першому автору цієї брошури Ізраїлю Мойсейовичу Гельфанду, тоді — члену-кореспонденту АН СРСР, який на громадських засадах вів уроки з математики (чи можна зараз у це повірити?..) в одній із московських шкіл. Тодішній ректор Московського державного університету (МДУ), відомий математик І.Г. Петровський звернувся до І.М. Гельфанда з проханням допомоги академіку А.М. Колмогорову в налагодженні роботи його школи-інтернату. Нато-

мість І.М. Гельфанд висунув зустрічну пропозицію — організувати заочну математичну школу, в якій могли б поглиблювати свої знання не декілька сотень учнів, а сотні тисяч школярів з усіх куточків країни. Коли ця пропозиція дістала підтримку, І.М. Гельфанд розробив загальну концепцію ЗМШ, її програму, а головне, в стилі терміни організував підготовку й видання навчальних посібників, виступаючи в них як автор і як незмінний редактор. Один із цих посібників — «Метод координат» — зараз перед очима читача.



**А.М. Колмогоров**



**І.Г. Петровський**



**І.М. Гельфанд**

Незважаючи на те, що всі книжечки з цієї серії спочатку призналися для учнів заочної математичної школи, невдовзі вони набули й самостійного значення і видавалися масовими тиражами для всіх учнів, що захоплюються математикою, та вчителів, які творчо її викладають. Цьому сприяло декілька важливих обставин.

По-перше, це — доступність цих книжечок для учнів: легкий стиль викладу, відсутність переобтяження технічними деталями, структурування теорії невеличкими порціями, достатня, але не надмірна кількість детально розібраних у тексті вправ.

По-друге, — фундаментальність, тобто погляд «у корінь», чітке виділення основоположних мотивів, ідей та методів.

По-третє, — «широта обхвату», притаманна великим ученим навіть у трактуванні елементарних речей. Це дає їм змогу «природно» переходити від елементарних понять до «захмарних» узагальнень сучасної математики. Наприклад, у даній брошурі читач від числової осі, відомої йому ще з 5–6 класів, поступово виводиться аж у 4-вимірний простір, оскільки, як зазначають автори, лише так математики можуть наочно змодельовати алгебраїчні співвідношення з чотирма змінними, а фізики — ефективно описувати чотиривимірний простір-час.

І насамкінець, це — чітка спрямованість на самостійну роботу учнів з текстом і одночасне розв'язування достатньої кількості вправ.

Усі ці якості спонукали й наше видавництво звернутися до перевіреної часом класики і взятися за поступове перевидання цих та інших подібних на них чудових книжечок для учнів у серії «Бібліотека фізико-математичної школи». «Метод координат» — перша книжечка із цього проекту.

\* \* \*

Прочитавши передмови і погортавши сторінки цієї книжечки, перш ніж приступити до роботи, радимо обов'язково прочитати додатки у кінці. Їх немає в оригінальному російському виданні, а помістили ми їх тому, що в них автори, оглядаючись на свій довгий і багатий життєвий шлях, привертають увагу до багатьох речей, актуальних якраз для читачів цієї книжечки.

Читаючи уважно ці додатки, ви, зокрема, неодмінно звернете увагу на те, якого великого значення надавав один із найбільших математиків ХХ ст. І.М. Гельфанд веденню акуратних записів у зошиті. Тому радимо й вам, як колись Гельфанд, для роботи записувати великим загальним зошитом. Розбийте його на частини, відповідно до кількості параграфів, які плануєте опанувати, наприклад, за рік, і поступово робіть акуратні записи про прочитане. Не про все одразу, а тільки про те, що на даний час зрозуміли. До незрозумілого поверніться завтра, післязавтра, через тиждень, а зрозумівши, так само запишіть у зошит. Особливо звертаємо увагу на вправи: не розв'язуючи їх і не записуючи акуратно розв'язань у зошит, ви належним чином змісту книжечки не засвоїте.

Не намагайтеся опанувати всю книжечку одразу; її писали професійні математики, а ви ще тільки вчитеся у школі.

Починати працювати можна навіть із 6-го класу, однак шкільного багажу цього класу буде достатньо лише для розділу I.

Для семикласників майже повністю доступний розділ II. Єдиним винятком будуть деякі моменти при виведенні рівнянь прямої, в яких застосовуються ознаки подібності трикутників, що вивчаються у 8-му класі. Відповідні факти поки що можна просто прийняти «на віру». Не зважайте й на те, що координати у геометрії, за шкільною програмою, вивчаються лише у 9-му класі: в алгебрі вони вводяться у 7-му класі, і при належній наполегливості цього для вас буде достатньо.

Розділи III і IV можна рекомендувати учням 9-го або 10-го класу.

### § 13. Задання фігур у просторі

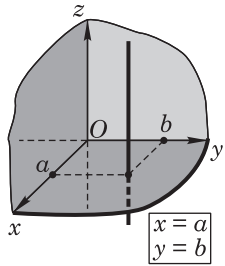


Рис. 13.1

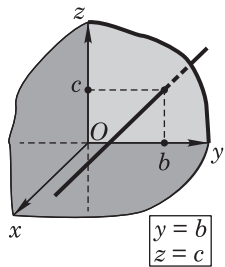


Рис. 13.2

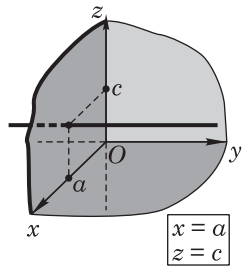


Рис. 13.3

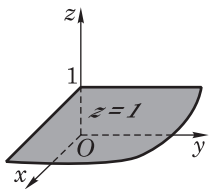


Рис. 13.4

Так само, як на площині, координати в просторі дають змогу задавати за допомогою чисел і числових співвідношень не тільки точки, а й лінії, поверхні та інші множини точок.

Подивимося, наприклад, яка вийде множина точок, якщо задати тільки дві координати, а третю вважати довільною. Умови

$$x = a, y = b,$$

де  $a$  і  $b$  — задані числа (наприклад,  $a = 5$ ,  $b = 4$ ), задають у просторі пряму, паралельну осі  $z$  (рис. 13.1). Усі точки такої прямої мають ту саму абсцису і ту саму ординату. Координата  $z$  може набувати будь-якого значення.

Так само умови

$$y = b, z = c$$

визначають пряму, паралельну осі  $x$  (рис. 13.2), а умови

$$z = c, x = a$$

пряму, паралельну осі  $y$  (рис. 13.3).

Цікаво, яка вийде множина точок, якщо задати тільки одну координату, наприклад,

$$z = 1?$$

Відповідь зрозуміла з рис. 13.4: це — площина, паралельна координатній площині  $xOy$  (тобто площині, що проходить через вісь  $Ox$  та вісь  $Oy$ ) і віддалена від неї на відстань 1 у напрямку додатної півосі  $z$ .

Розглянемо ще декілька прикладів, які показують, як можна задати у просторі різні множини за допомогою рівнянь та інших співвідношень між координатами.

Приклад 1. Розглянемо рівняння:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (13.1)$$

Оскільки виразом  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  визначається відстань від точки  $(x; y; z)$  до початку координат, то зрозуміло, що в перекладі на геометричну мову співвідношення (13.1) означає, що точка з координатами  $(x; y; z)$ , яка задовольняє це співвідношення, знаходиться на відстані  $R$  від початку координат. Отже, множина всіх точок, для яких виконується співвідношення

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, —$$

це *поверхня кулі (сфера)* з центром у початку координат і радіусом  $R$ .

Приклад 2. Розглянемо, де розміщені точки, координати яких задовольняють співвідношення

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Оскільки це співвідношення означає, що відстань від точки  $(x; y; z)$  до початку координат менша або дорівнює  $R$ , то шукана множина — це множина точок, які лежать усередині і на поверхні кулі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює одиниці.

Приклад 3. Яка множина точок задається рівнянням

$$x^2 + y^2 = 1? \quad (13.2)$$

Розглянемо спочатку тільки точки площини  $xOy$ , які задовольняють це співвідношення, тобто точки, для яких  $z = 0$ . Тоді рівняння (13.2), як ми бачили раніше (стор. 59), задає коло з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює одиниці. У кожній із цих точок координата  $z$  дорівнює нулю, а координати  $x$  та  $y$  задовольняють співвідношення (13.2). Напри-

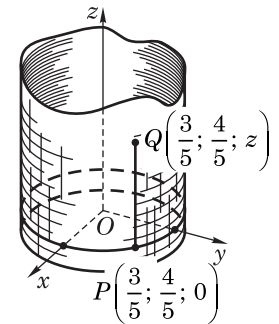


Рис. 13.5

При цьому важливо, що не було якихось непорушних строків розв'язування задач, ніхто не «ловив» учня на тому, що він сьогодні не вивчив урок. Просто, наприклад, один зі студентів радісно казав мені: «Олено Георгіївно, відзначте: Маша Петрова «відфібоначчилась». (Це означало, що Маша склала йому розв'язування задачі про послідовності Фібоначчі.)

Була серія «задач-перлин», серед них, зокрема, задача про жадібного дачовласника (по суті про побудову канторової множини), задача про те, як замостити трикутник відрізками, та інші. Знову кожен вибирав задачу, яку хотів розв'язувати, і возився з нею.

Звичайно, можна було узнати розв'язок у товаришів. І можливо, хтось це робив. Але мовчав — тому що це було соромно. Вважалося непристойним не те, що ти не можеш розв'язати задачу, а те, що ти запитуєш, як розв'язувати. Запитати можна було про те, що незрозуміло в умові, можна було радитися з товаришами і з викладачами, обговорювати ідеї, які виникали.

Поступово школярі починали розуміти, що одна задача, яка спочатку не виходить, а потім нарешті розв'язується, цінніша і, головне, цікавіша, ніж десять «відлуканих як горішки» стандартних прикладів.

Заняття у 2-ій школі (а пізніше і в ЗМШ) ґрунтувалися на переконанні, що успішне навчання можливе лише при активному бажанні учня. Як же виникає таке бажання?

Хтось у моїй присутності запитав Гельфанда, як потрібно пробуджувати й розвивати інтерес до математики у школярів. Той відповів, майже не задумуючись: потрібно давати їм гарні задачі. Я з властивим мені занудством запитала: «А які це — гарні задачі?». Гельфанд подумав секунд п'ять і сказав: «Гарні задачі — це цікаві і легкі».

Тут варто згадати улюблене Ізраїлем Мойсейовичем оповідання Чехова про кошеня, якого насильно вчили ловити мишей. Кошеня, ставши солідним котом, забачивши мишу, впадало в паніку й давало драпака. Таким, на жаль, часто буває й результат навчання математики. І не тільки математики: мені траплялися люди, які закінчили музичну школу і після цього жодного разу не підходили до рояля.

І мова йде не про підготовку майбутніх математиків. Гельфанд не раз говорив, що математика є таким самим важливим компонентом культури, як, наприклад, і музика. Людина, яка вміє слухати музику, дістає від цього задоволення, хоча зовсім не зобов'язана бути музикантом. Якщо ж музика для неї не існує, то величезна частина

культури для цієї людини втрачена, і духовний її світ збіднений. У цьому сенсі математика потрібна кожній людині, навіть якщо вона й не знадобиться їй у своїй прикладній іпостасі.

У перші роки роботи ЗМШ у ній майже з точністю повторилася структура роботи у 2-ій школі: замість лекцій — посібники, написані Гельфандом та іншими, «семінари» з розв'язування задач проходили заочно за завданнями, складеними співробітниками ЗМШ, а безпосередньо «працювали» зі школярами, перевіряючи їхні роботи, аналізуючи помилки і даючи вказівки для їхнього виправлення, — знову таки студенти мехмату.

Одне з важливих положень «педагогіки за Гельфандом» сам Гельфанд сформулював так: «У математиці новому потрібно вчити на простих речах, знайомих учням». ...Ізраїль Мойсейович говорив, що його обурюють шкільні задачі, в яких замість того, щоб зрозуміти суть справи, учням доводиться витратити час на складні обчислення й перетворення. «У результаті, — казав він, — сам учитель не одразу зрозуміє, у чому саме учень зробив помилку».

Це зовсім не означає, що Гельфанд не розумів важливості привчання школярів до ретельного й відповідального виконання рутинної роботи. Навпаки, він постійно наголошував, що для математика «брудна» робота неприпустима, що коли людина не в змозі написати акуратно сторінку, якщо у зошиті не зрозумієш, де початок і де кінець прикладу, якщо, розв'язавши важку задачу, раптом дістають неправильну відповідь, оскільки  $7 \times 8 = 59$ , і т. ін., то із занять математикою, швидше за все, нічого не вийде. «Можливо, що є такі науки, в яких бруд потрібний — кажуть, від бруду мікроби гинуть... Але для математики бруд протипоказаний». Він приносив і показував хлопцям свої робочі записи: завжди в зошиті, неправильні або непотрібні місця перекреслені, але акуратно. Він казав: «Я завжди, не буваючи на уроці, можу сказати, будуть у цього вчителя учні знати математику, чи ні: потрібно лише подивитися їхні зошити».

Цей бік навчання дуже сильно працює в ЗМШ. Адже там учні щорічно повинні виконати 7–8 завдань за спеціально написаними посібниками. Кожне завдання складається із двох (а то й трьох) десятків задач, розв'язати які можна, вивчивши відповідний текст посібника і розібравши приклади. А потім свої розв'язки потрібно записати з повним обґрунтуванням. «Врешті-решт, — писав Гельфанд, — більшість учнів заочної школи привчаються не «язиками плескати», а посправжньому працювати».

## Зміст

Маленька книжечка великих романтиків (Передмова редактора українського видання) .....	3
Передмова до шостого російського видання .....	8
Передне слово до школярів .....	11
Вступ .....	13
Розділ I. Координати на прямій .....	15
§1. Числова вісь .....	15
§2. Абсолютна величина числа .....	20
§3. Відстань між двома точками на прямій .....	28
§4*. Поділ відрізка у заданому відношенні.....	36
Розділ II. Координати на площині .....	42
§5. Координатна площина.....	42
§6. Множини точок на площині .....	47
§7. Відстань між точками на площині .....	54
§8. Задання фігур .....	58
§9. Пряма на площині .....	64
§10. Алгебра і геометрія .....	78
§11*. Інші системи координат .....	89
Розділ III. Координати в просторі .....	99
§12. Координатні осі і площини .....	99
§13. Задання фігур у просторі .....	104
§14. Площина в просторі .....	109
§15. Пряма в просторі .....	114
§16*. Взаємне розміщення прямих і площин .....	123
Розділ IV. Чотирирівимірний простір .....	132
§17. Вступ .....	132
§18. Геометрія чотирирівимірного простору .....	142
§19. Чотирирівимірний куб .....	150
§20. Різні задачі .....	162
Доповнення, примітки і коментарі .....	176
Відповіді, вказівки, розв'язки .....	187
Додаток I. Фрагмент інтерв'ю з академіком І.М. Гельфандом .....	197
Додаток II. Гельфанд і школа. Спогади автора книги О.Г. Глаголевої.....	209

## ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКА ЗАОЧНА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА при Тернопільському національному педагогічному університеті ім. Володимира Гнатюка

46027, м. Тернопіль, вул. М. Кривоноса, 2, педуніверситет, ЗЗМШ.



ШУКАЄМО  
КОВАЛЕВСЬКИХ ТА ОСТРОГРАДСЬКИХ



Шановні друзі,  
учні 5 – 10 класів!

Запрошуємо вас на навчання в Західноукраїнській заочній математичній школі (ЗЗМШ).

Завданням ЗЗМШ є допомога зацікавленим учням усіх типів шкіл у поглибленому вивченні основних розділів шкільної математики. Учні, які успішно завершать навчання, разом з посвідченням отримують рекомендації для вступу до вищих навчальних закладів. Значну користь принесе навчання у нашій школі й тим, хто активно готується до участі в математичних олімпіадах. Зокрема, школа видає спеціальні посібники з розв'язування конкурсних та олімпіадних задач.

Навчання у ЗЗМШ відбувається на двох рівнях — основному та поглибленому — і полягає в самостійному опрацюванні теоретичного матеріалу за навчальними посібниками школи та у розв'язуванні й належному оформленні контрольних робіт. Розпочинати навчання в ЗЗМШ можна з будь-якого класу, з 6-го по 11-й, і продовжувати до закінчення основної школи. Навчання здійснюється за помірну плату, яка вноситься лише після одержання повідомлення про зарахування.

Зарахування до ЗЗМШ відбувається на основі письмової рекомендації вчителя математики або за результатами виконання вступної контрольної роботи, умови якої надсилаються кожному бажаючому. Поза конкурсом зараховуються учасники міських та районних олімпіад юних математиків. Для цього до ЗЗМШ необхідно надіслати довідку зі школи про участь в олімпіаді.

Кожен претендент на навчання в ЗЗМШ повідомляє нам своє прізвище, ім'я і по батькові (повністю), клас основної школи, а також повну домашню адресу. Для одержання відповіді вкладіть звичайний поштовий конверт з маркою, підписаний на вашу домашню адресу.

На листи від майбутніх Остроградських і Ковалевських ми чекаємо за адресами: **46027, м. Тернопіль, вул. М. Кривоноса, 2, педуніверситет, ЗЗМШ, або: 46018, м. Тернопіль – 18, а/с 426, ЗЗМШ.**



*Навчальне видання*

Бібліотечка фізико-математичної школи  
Математика

ГЕЛЬФАНД Ізраїль Мойсейович  
ГЛАГОЛЄВА Олена Георгіївна  
КИРИЛОВ Олександр Олександрович

## МЕТОД КООРДИНАТ

Навчальний посібник

Переклад з російської і загальна редакція  
В.О. Тадеєва

Головний редактор *Богдан Будний*  
Редактори *Василь Тадеєв, Володимир Дячун*  
Художник обкладинки *Володимир Басалига*  
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.07.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.  
Умовн. друк. арк. 12.56. Умовн. фарбо-відб. 12.56.  
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ДК №370 від 21.03.2001 р.  
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008  
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48  
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com  
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1909-5



9 789661 019095