

Дійсні числа. Порівняння чисел та дії з ними

Тема 1. Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння і округлення чисел. Ознаки подільності. НСД і НСК. Арифметичні задачі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

- властивості дій з дійсними числами; правила порівняння дійсних чисел;
- розрізняти види чисел та числових проміжків;
- порівнювати дійсні числа;
- виконувати дії з дійсними числами;
- використовувати ознаки подільності чисел на 2, 3, 5, 9, 10;
- знаходити найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне двох (кількох) чисел;
- знаходити неповну частку та остачу від ділення одного натурального числа на інше;
- перетворювати звичайний дріб у десятковий; округлювати цілі числа й десяткові дробі;
- використовувати властивості модуля до розв'язування задач;
- перетворювати нескінченний періодичний дріб у звичайний.

Натуральні числа — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, Множину натуральних чисел позначають буквою N .

Цілі числа — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Цілими є числа $-2, 4, 0$ тощо. Множину цілих чисел позначають буквою Z .

Раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in Z, n \in N$. Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Раціональними є числа $4,5; -3; -7,3; -2\frac{7}{9}$ тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою Q .

Ірраціональні числа — це нескінченні десяткові неперіодичні дробі. Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{2}, \cos 7^\circ, \pi$ тощо. Множину ірраціональних чисел позначають буквою I .

Дійсні числа — це раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на *числовій осі*, а кожній точці числової осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою R .

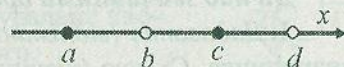


Рис. 1

Існують такі види числових проміжків (див. рис. 1): $[a; c]; (b; d); [a; b]; (b; c]$, де деякі з чисел можуть бути $\pm\infty$.

Звичайний дріб — це число виду $\frac{m}{n}$, де m та n — натуральні числа. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m : n$. Число n — *знаменник* дробу, число m — *чисельник* дробу.

Звичайний дріб також є відношенням. Усі властивості звичайних дробів є властивостями відношень. І навпаки.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, називають *правильним*. Дріб, у якому чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називають *неправильним*.

Наприклад, дробі $\frac{7}{13}, \frac{6}{24}$ — правильні, а дробі $\frac{21}{13}, \frac{12}{12}, \frac{14}{7}$ — неправильні.

Мішаним числом називають число, складене із натурального числа (*ціла частина*) і звичайного дробу (*дробова частина*). Мішане число є сумою цілої і дробової частини. Кожне мішане число можна записати як неправильний, у якого чисельник не ділиться на знаменник.

Наприклад, $5\frac{9}{11}, 32\frac{3}{5}$ — мішані числа, $5\frac{9}{11} = 5 + \frac{9}{11}$.

З будь-якого неправильного дробу можна виділити цілу частину. Для цього досить поділити з остачею чисельник на знаменник. Частка від ділення буде цілою частиною, остача — чисельником, а дільник — знаменником. Наприклад, $\frac{37}{9} = 4\frac{1}{9}$, бо $37 : 9 = 4$ (ост. 1).

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад, $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30}$; $\frac{200}{90} = \frac{200 : 10}{90 : 10} = \frac{20}{9}$.

Скороченням дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника. Якщо він дорівнює 1, то дріб називають *нескоротним*.

Наприклад, дріб $\frac{200}{90}$ скоротний, бо $\frac{200}{90} = \frac{200 : 10}{90 : 10} = \frac{20}{9}$, а дріб $\frac{9}{14}$ — нескоротний.

Будь-які два дробу можна звести до одного і того ж *спільного знаменника*. Спільним знаменником може бути будь-яке спільне кратне їх знаменників (наприклад, добуток знаменників). Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дріб до найменшого спільного знаменника, досить:

- 1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;
- 2) поділити це НСК на кожен знаменник і знайти додаткові множники для кожного дробу;
- 3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

Наприклад, звести дробу $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника.

- 1) НСК(8, 6) = 24;
- 2) $24 : 8 = 3$; $24 : 6 = 4$. Числа 3 і 4 є додатковими множниками для дробів $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ відповідно;
- 3) $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$.

Дії над звичайними дробами

1. Додавання (віднімання). Щоб додати (відняти) дробу, треба спочатку звести їх до спільного знаменника. Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників, а знаменник дорівнює їх знаменнику:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \right).$$

2. Множення. Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

3. Ділення. Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дробу-діленого та оберненого числа до дробу-дільника: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Наприклад:

- 1) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{2+3}{13} = \frac{5}{13}$;
- 2) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$;
- 3) $\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{18} = \frac{3+8}{18} = \frac{11}{18}$;
- 4) $3\frac{1}{10} + 6\frac{4}{15} = 3+6 + \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{30} = 9 + \frac{11}{30} = 9\frac{11}{30}$;
- 5) $7\frac{4}{5} - 3\frac{1}{4} = 7-3 + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = 4 + \frac{16-5}{20} = 4\frac{11}{20}$;
- 6) $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{4}{45}$;
- 7) $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{56}{6} = 9\frac{2}{6} = 9\frac{1}{3}$;
- 8) $7 : \frac{4}{9} = \frac{7}{1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{1 \cdot 4} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$;