І.Я. Клочко

МАТЕМАТИКА

Геометрія

Зовнішнє незалежне оцінювання

Завдання рівня стандарту

Частина II

Комплексне видання для підготовки до ДПА у формі ЗНО

- Теорія
- Зразки розв'язування типових завдань
- Відеоуроки
- Тематичні тестові завдання
- Тести на повторення

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 51(075).4
К50

Посилання на сторінки з відеоуроками:

Клочко І.Я.

К50 Математика. Геометрія : ЗНО : завд. рівня стандарту : Комплексне видання для підготовки до ДПА у формі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Клочко. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021. — 448 с.

2005000017421

У 2021 році випускники закладів освіти, які здобувають повну загальну середню освіту, *обов'язково* складатимуть державну підсумкову атестацію (ДПА) у формі зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики. Здобувачі освіти, яким результат ЗНО з математики має зараховуватися як оцінка за ДПА, отримають її за результатами виконання завдань рівня стандарту, якщо вивчали математику на рівні стандарту, або рівня стандарту та профільного рівня, якщо вивчали математику на профільному рівні.

Метою пропонованого навчального посібника є організація самостійної роботи учнів при підготовці до ЗНО за програмою рівня стандарту. У посібнику викладена теорія зі всіх основних тем шкільного курсу геометрії, запропоновано розв'язання низки задач, що роз'яснюють теорію. До кожної теми укладено тематичний тест за типологією тесту ЗНО. Після кожної групи тем подано тест на повторення вивченого матеріалу, який укладено подібно до тесту ЗНО рівня стандарту. До всіх завдань тестів є відповіді. При вивченні теорії тієї чи іншої теми можна переглядати відеоуроки, на які наведено посилання. Усі тестові завдання відповідають чинній програмі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів рівня стандарту та вимогам щодо написання сертифікаційної роботи ЗНО.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл, які вивчають математику на рівні стандарту.

УДК 51(075).4

2005000017421

Передмова

Хто добре запалився, той добре почав,
а добре почати – це наполовину завершити.
Григорій Сковорода, український філософ

Метою пропонованого навчального посібника є організація самостійної роботи старшокласників при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) за програмою рівня стандарту. Посібник містить теорію кожної з тем, зразки розв'язання типових задач, а також тестові завдання зі всіх основних тем геометрії 7 – 11-го класів. Розв'язані вправи та задачі посібника створюють практичну базу для самостійного розв'язування завдань посібника. У посібнику запропоновано посилання, у вигляді QR-коду, за яким можна переглядати відеоуроки до кожної з тем посібника. Тестові завдання укладено за темами, що сприяє успішному засвоєнню учнями матеріалу. Структура кожного тематичного тесту є подібною до структури тестів, що пропонуються на зовнішньому оцінюванні знань абітурієнтами математики. Кожний тест з тієї чи іншої теми містить 32 завдання. Завдання з першого по двадцять четверте передбачають вибір правильної відповіді з п'яти запропонованих. Серед наведених відповідей є лише одна правильна відповідь. Далі пропонуються чотири завдання (25, 26, 27 і 28) на встановлення відповідностей, у яких до кожного із трьох або чотирьох завдань потрібно підібрати логічну пару з п'яти запропонованих. Завдання з 29-го по 32-е подано без відповідей, тому потрібно розв'язати кожну із запропонованих задач і вписати отриману відповідь. За таким принципом побудовано тести ЗНО знань випускників загальноосвітніх шкіл. Навчальний посібник містить також шість тестів на повторення, які подано після кожних п'яти вивчених тем (і після тем 26 – 31) і завдання в яких (28 завдань) укладено з вивчених раніше тем. У тестах на повторення, а також у тематичних тестах, подано задачі ЗНО минулих років, про що зазначено відповідними посиланнями. Тести на повторення за структурою і кількістю завдань відповідають вимогам щодо складання іспиту державної підсумкової атестації за курс основної школи рівня стандарту. Також запропоновано демонстраційний варіант тесту, який укладено за всіма вимогами щодо державної підсумкової атестації у формі ЗНО 2021 року. Наприкінці посібника подано відповіді до всіх тестових завдань.

Посібник є важливою складовою комплексної авторської програми підготовки старшокласників до ЗНО. Тестові завдання посібника апробовані автором серед старшокласників і показали свою ефективність щодо їхньої підготовки до ЗНО й успішного написання сертифікаційної роботи ЗНО.

Усі тестові завдання відповідають чинній програмі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів та вимогам щодо знань абітурієнтів на зовнішньому тестуванні.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл, які вивчають математику за академічним рівнем або рівнем стандарту.

Перелік навчальних тем та послідовність їхнього вивчення

Геометрія

Тема 1. Найпростіші геометричні фігури.
Тема 2. Взаємне розміщення прямих на площині.
Тема 3. Трикутники. Ознаки рівності трикутників. Сума кутів трикутника. Рівнобедрений трикутник. Нерівність трикутника.
Тема 4. Зовнішній кут трикутника. Прямокутний трикутник.
Тема 5. Коло та його елементи. Коло, вписане у трикутник, і коло, описане навколо трикутника. Геометричне місце точок.
Тест 1. **Повторення.**
Тема 6. Багатокутники. Чотирикутники. Паралелограм.
Тема 7. Прямокутник. Квадрат. Ромб.
Тема 8. Середня лінія трикутника. Трапеція. Середня лінія трапеції. Властивості трапеції.
Тема 9. Центральні та вписані кути.
Тема 10. Вписані й описані чотирикутники.
Тест 2. **Повторення.**
Тема 11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки. Теорема про медіани трикутника. Теорема про бісектрису трикутника.
Тема 12. Подібність трикутників.
Тема 13. Застосування подібності. Подібність і коло.
Тема 14. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора.
Тема 15. Співвідношення між кутами та сторонами прямокутного трикутника.
Тест 3. **Повторення.**
Тема 16. Теорема косинусів. Теорема синусів.
Тема 17. Площа паралелограма (прямокутника, квадрата, ромба).
Тема 18. Площа трикутника.
Тема 19. Площа трапеції.
Тема 20. Описані та вписані правильні багатокутники. Довжина кола. Площа круга. Площа сектора. Площа сегмента.
Тест 4. **Повторення.**
Тема 21. Декартові координати на площині.
Тема 22. Вектори.
Тема 23. Взаємне розташування прямих у просторі. Взаємне розташування прямої і площини. Взаємне розташування площин. Властивості паралельних площин. Паралельне проєктування.
Тема 24. Перпендикулярність прямих і площини. Відстані у просторі. Теорема про три перпендикуляри.
Тема 25. Кути у просторі.
Тест 5. **Повторення.**
Тема 26. Декартова система координат у просторі. Вектори.

Тема 27. Багатогранники. Призма. Площі поверхонь, об’єм.
Тема 28. Піраміди. Особливі випадки пірамід. Площі поверхонь та об’єм піраміди.
Тема 29. Циліндр. Площа поверхні, об’єм.
Тема 30. Конус. Площа поверхні, об’єм.
Тема 31. Куля. Площа сфери, об’єм кулі. Кульовий сектор та кульовий сегмент.
Тест 6. Повторення.
Демонстраційний тест.

Тема 1. Найпростіші геометричні фігури

Теоретичні відомості

1. Основні геометричні означення

До основних геометричних фігур належать: точка, пряма та площина.

1) Точка не визначається, а описується. Точки позначаються великими латинськими літерами, наприклад, A, B, C.

2) Пряма не визначається, а описується. Прямі позначаються однією малою або двома великими латинськими літерами, наприклад, a або AB (рис. 1).

3) Площина не визначається, а описується. Прикладами частин площин є поверхня стола, дошки, дзеркало, поверхня водоймища в безвітряну погоду.

Із точок, прямих та частин площин складаються всі інші геометричні фігури.

4) Відрізок — частина прямої, обмежена двома точками (рис. 2). Точки A і B — кінці відрізка.

5) Промінь – частина прямої, обмежена однією точкою (рис. 3). Ця точка (точка A) називається *початком променя*. Промінь AB називають ще півпрямою.

6) Доповняльні промені — промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої (рис. 4).

Наприклад, AB і AC — доповняльні промені.

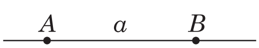


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

7) Кут — це частина площини, обмежена двома променями, які мають спільний початок (рис. 5).

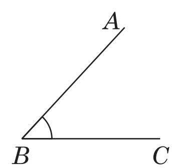


Рис. 5

Кути позначають:

- трьома великими літерами латинського алфавіту, середня з яких — вершина кута, наприклад, $\angle ABC$;
- лише однією літерою латинського алфавіту, наприклад, $\angle A$, $\angle B$;
- однією малою літерою грецького алфавіту, наприклад, α, β, γ;
- числами, наприклад, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

Є й інші позначення кутів, які використовуються рідше.

8) Градус — це одиниця вимірювання кутів, $1^\circ = \dfrac{1}{180}$ розгорнутого кута.

9) Види кутів:

- гострий кут ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$);
- прямий кут ($\alpha = 90^\circ$);
- тупий кут ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$);
- розгорнутий кут ($\alpha = 180^\circ$) — кут, обидві сторони якого лежать на одній прямій.

10) Суміжні кути — кути, які мають спільну сторону, а дві інші сторони утворюють одну пряму (рис. 6).

Кути ABC і CBD — суміжні.

11) Вертикальні кути — кути, сторони одного з яких є продовженням сторін іншого (рис. 7).

Пари вертикальних кутів: $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$.

12) Бісектриса — промінь, який ділить даний кут на два рівних кути.

13) Паралельні прямі — прямі, які лежать в одній площині і не мають спільних точок (не перетинаються) (рис. 8). Записують $a \parallel b$ — пряма a паралельна прямій b.

14) Перпендикулярні прямі — прямі, при перетині яких утворюється прямий кут (рис. 9).

Записують $a \perp b$ — пряма a перпендикулярна до прямої b.

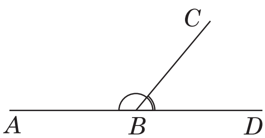


Рис. 6

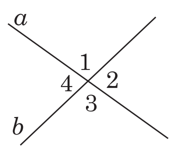


Рис. 7

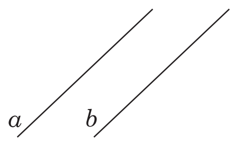


Рис. 8

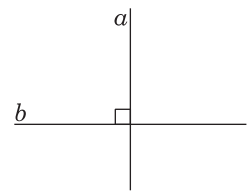


Рис. 9

2. Аксіоми планіметрії

Аксіома — твердження, яке приймається без доведення. В геометрії на площині існує 9 аксіом. Оскільки перші п'ять аксіом найактуальніші щодо розв'язання задач, то проілюструємо їх рисунками.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які їй не належать.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну (рис. 10).

Через точки A і B проходить пряма a, або пряма AB. Точки A і B належать прямій a, а точки C і D не належать прямій a.

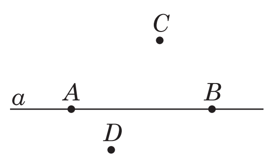


Рис. 10

II. Із трьох точок на прямій одна лежить між двома іншими (рис. 11).

Точка C лежить поміж точками A і B.

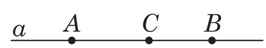


Рис. 11

III. Кожний відрізок має певну величину, більшу за 0. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він поділяється будь-якою його точкою (рис. 12).

$$AB = AC + CB.$$

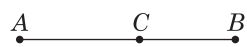


Рис. 12

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини (рис. 13).

Пряма a поділяє площину на дві півплощини.

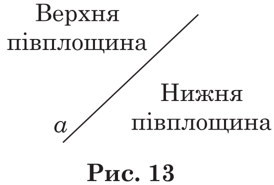


Рис. 13

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за 0. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. 14).

Промінь BD поділяє кут ABC на два кути так, що $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.

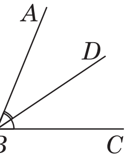


Рис. 14

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямої у дану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Приклад 1. Відрізок BC на 15 см довший за відрізок AC. Обчисліть довжини відрізків AC і BC, якщо відрізок $AB = 27$ см (рис. 15).

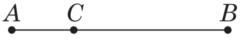


Рис. 15

Розв'язання. Нехай довжина відрізка AC дорівнює x см, тоді $BC = x + 15$ (см).

Оскільки $AB = AC + CB$, за аксіомою, то $x + x + 15 = 27$. Тоді $2x = 12$, $x = 6$ (см).

Отже, $AC = 6$ см. Тоді $BC = 6 + 15 = 21$ (см).

Відповідь. 6 см, 21 см.

Приклад 2. Відомо, що $\angle ABD : \angle DBC = 5 : 3$, $\angle ABC = 112°$ (рис. 16). Обчисліть кут ABD.

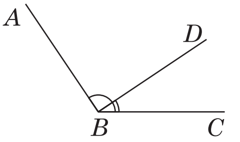


Рис. 16

Розв'язання. Нехай одна частина від кута ABC дорівнює $x°$. Тоді $\angle ABD = 5x$, $\angle DBC = 3x$.

За аксіомою, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$. Тоді $5x + 3x = 112°$, $8x = 112°$, $x = 14°$.

Отже, $\angle ABD = 5 \cdot 14° = 70°$.

Відповідь. 70°.

Приклад 3 (опорна задача). Доведіть, що якщо даний відрізок поділити на які завгодно дві частини, то відстань між серединами цих частин дорівнює половині відрізка.

Доведення. Нехай відрізок AB поділений точкою C на дві частини так, що $AB = AC + CB$ (рис. 17).

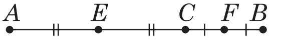


Рис. 17

Точка E — середина відрізка AC, точка F — середина відрізка CB.

За аксіомою: $EF = EC + CF$. Оскільки $EC = \frac{1}{2} AC$, $CF = \frac{1}{2} CB$, то

$EF = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2} AB$. Таким чином, $EF = \frac{1}{2} AB$, що і потрібно було довести.

3. Теореми про суміжні та вертикальні кути

Твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення називають *теоремою*.

Одними з перших теорем геометрії є теореми про суміжні та вертикальні кути, які довів Фалес Мілетський. Кути AOC і DOB та кути AOD і COB — пари вертикальних кутів (рис. 18).

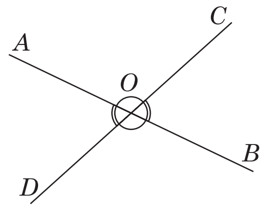


Рис. 18

Теорема. Сума суміжних кутів становить 180°.

Доведення. Побудуємо дві прямі, що перетинаються (рис. 19).

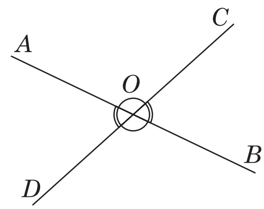


Рис. 19

Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут AOB і $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$, за аксіомою, то $\angle AOC + \angle COB = 180°$, що і треба було довести.

Теорема. Вертикальні кути рівні.

Доведення. $\angle AOC + \angle COB = 180°$, як суміжні (рис. 19). Аналогічно $\angle DOB + \angle COB = 180°$.

Тоді $\angle AOC + \angle COB = \angle DOB + \angle COB$, звідси $\angle AOC = \angle DOB$, що і треба було довести.

📖 **Приклад 4.** Прямі a і b перетинаються так, що $\angle 2 + \angle 4 = 224°$ (рис. 20). Знайдіть $\angle 1$.

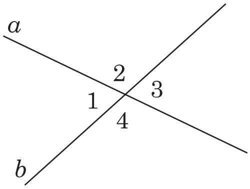


Рис. 20

Розв'язання. Оскільки кути 2 і 4 вертикальні, то вони рівні. Тому кожен із них дорівнює $224° : 2 = 112°$.

Кут 1 суміжний до кута 2 і до кута 4.

Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, за теоремою про суму суміжних кутів.

Звідси $\angle 1 = 180° - \angle 2 = 180° - 112° = 68°$.

Відповідь. 68°.

📖 **Приклад 5.** Різниця двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 24°. Знайдіть усі кути.

Розв'язання. Якщо різниця двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, не дорівнює 0, то ці кути суміжні. Позначимо шукані кути α і β. Тоді $\alpha - \beta = 24°$ і $\alpha + \beta = 180°$, оскільки кути α і β суміжні. Додамо отримані рівності: $2\alpha = 204°$, звідси $\alpha = 102°$. Тоді $\beta = 180° – 102° = 78°$.

Відповідь. 78°, 102°.

📖 **Приклад 6 (опорна задача).** Доведіть, що бісектриси двох суміжних кутів взаємно перпендикулярні.

Доведення. Кути AOC і AOB суміжні, ON і OM — їхні бісектриси (рис. 21).

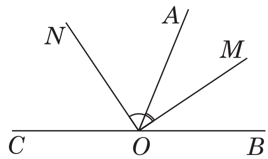


Рис. 21

Тоді $\angle AOC = 2\angle AON$, $\angle AOB = 2\angle AOM$, за означенням бісектриси кута.

Нехай $\angle AON = \alpha$, $\angle AOM = \beta$, тоді $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle AOB = 2\beta$.

Оскільки $\angle AOC + \angle AOB = \angle BOC = 180°$, то $2\alpha + 2\beta = 180°$, або $\alpha + \beta = 90°$.

Звідси $\angle MON = \angle AON + \angle AOM = \alpha + \beta = 90°$, що і потрібно було довести.

📖 **Приклад 7 (опорна задача).** Доведіть, що пряма, проведена через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

Доведення. Нехай OM — бісектриса кута AOB, $CO \perp OM$ (рис. 22).

Тоді $\angle AOM = \angle MOB = \alpha$.

Нехай $\angle COA = x$, $\angle COD = y$. Тоді $y + x + 2\alpha = 180°$ (1).

За умовою, $x + \alpha = 90°$, звідси $\alpha = 90° - x$ (2).

Рівність (2) підставимо в (1): $y + x + 2(90° - x) = 180°$, звідси $y - x = 0$. Тоді $y = x$.

Отже, CO — бісектриса кута DOA, що і потрібно було довести.

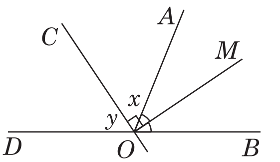


Рис. 22

📖 **Приклад 8 (опорна задача).** Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів належать одній прямій.

Доведення. Нехай прямі AC і BD перетинаються в точці O (рис. 23).

OM — бісектриса кута AOB, ON — бісектриса кута DOC. Потрібно довести, що точки M, N, O належать одній прямій, або $\angle MON = 180°$.

Введемо позначення: $\angle MOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$.

Оскільки AC — пряма, то $\angle AOM + \angle MOC = 180°$, або $2\alpha + \beta = 180°$.

$\angle AOD = \angle BOC = \beta$, як вертикальні, тоді:

$\angle MON = \angle AOM + \angle AOD + \angle DON = \alpha + \beta + \alpha = 2\alpha + \beta = 180°$.

Отже, MN — пряма, що і треба було довести.

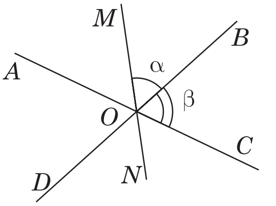


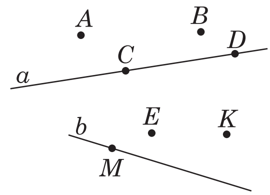
Рис. 23

Тестові завдання

1. Яку найбільшу кількість прямих можна провести через три точки, що не лежать на одній прямій?

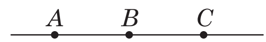
А	Б	В	Г	Д
одну	дві	три	чотири	інша відповідь

2. Скільки точок не належить прямим a або b (див. рисунок)?



А	Б	В	Г	Д
2	4	5	7	8

3. Точки A, B і C лежать на одній прямій (див. рисунок). Яке з наступних тверджень правильне?

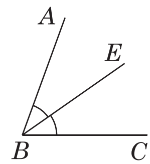


А	Б	В	Г	Д
$AC + BC < AB$	$AB + BC > AC$	$AB + BC \neq AC$	$AB = AC - BC$	$AB = BC$

4. Точка B належить відрізку AC. Знайдіть AC, якщо $BC = 8$ см, а відрізок AB на 5 см менший від відрізка BC.

А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	9 см	11 см	13 см

5. Промінь BE — бісектриса кута ABC (див. рисунок). Обчисліть кут ABC, якщо $\angle EBC = 38°$.



А	Б	В	Г	Д
19°	72°	74°	76°	78°

6. Точка K належить відрізку AC. Знайдіть AC, якщо $AK = 9$ см, а відрізок KC удвічі більший за AK.

А	Б	В	Г	Д
9 см	12 см	18 см	27 см	32 см

7. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Якщо пряма та відрізок не перетинаються, то вони паралельні.
Б Із двох суміжних кутів один завжди гострий, а другий — тупий.
В Вертикальні кути мають спільну вершину.
Г Якщо кути рівні, то вони вертикальні.
Д Сума вертикальних кутів дорівнює 180°.

8. Величина кута ABC дорівнює 120°. Промінь BD поділяє його на два кути, один із яких утричі менший від іншого. Обчисліть більший із цих двох кутів.

А	Б	В	Г	Д
30°	60°	70°	80°	90°

9. Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують шістнадцяту годину.

А	Б	В	Г	Д
90°	100°	120°	130°	150°

10. Промінь OE поділяє кут AOB на два кути. Знайдіть $\angle AOE$, якщо $\angle AOB = 126°$, а $\angle EOB$ на 38° більший за $\angle AOE$.

А	Б	В	Г	Д
88°	82°	44°	36°	164°

11. Промінь OS поділяє розгорнутий кут AOB на два кути. Знайдіть $\angle BOS$, якщо $\angle AOS : \angle BOS = 4:5$.

А	Б	В	Г	Д
80°	100°	120°	125°	130°

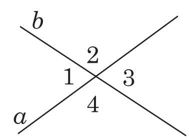
12. Один із суміжних кутів у 8 разів менший від другого. Знайдіть більший кут.

А	Б	В	Г	Д
20°	60°	100°	120°	160°

13. Яке з наведених тверджень є неправильним?

А Два промені є доповняльними, якщо вони лежать на одній прямій і мають спільний початок.
Б Із двох суміжних кутів один завжди гострий, а другий — тупий.
В Вертикальні кути мають спільну вершину.
Г Будь-який промінь, що проходить між сторонами прямого кута, поділяє його на два гострі кути.
Д Бісектриса кута — промінь, який поділяє кут навпіл.

14. Прямі a і b перетинаються так, що $\angle 1 + \angle 3 = 148°$ (див. рисунок). Знайдіть $\angle 2$.



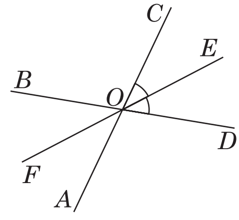
А	Б	В	Г	Д
106°	74°	76°	84°	112°

15. На промені AM відкладено відрізки: $AB = 20$ мм, $AC = 5$ см, $AD = 90$ мм. Чому дорівнює відстань між серединами відрізків AB і CD?

А	Б	В	Г	Д
4 см	5 см	6 см	8 см	інша відповідь

16. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle COE = \angle EOD = 35°$ (див. рисунок).

А	Б	В	Г	Д
35°	70°	90°	110°	120°



17. По один бік від точки A на прямій відкладено два відрізи $AB = 2{,}4$ см та $BC = 6{,}8$ см. Яка відстань між їхніми серединами?

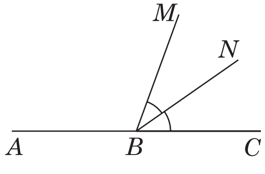
А	Б	В	Г	Д
4,5 см	4,6 см	4,7 см	9 см	інша відповідь

18. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 110°. Знайдіть величину найбільшого із кутів.

А	Б	В	Г	Д
55°	110°	120°	125°	135°

19. Кут ABC — розгорнутий, $\angle NBC = 35°$, промінь BN — бісектриса кута MBC (див. рисунок). Обчисліть кут ABM.

А	Б	В	Г	Д
70°	145°	120°	110°	80°

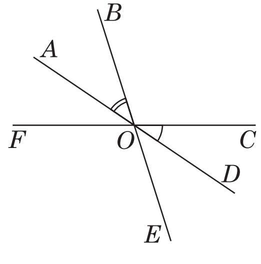


20. Від прямої PK у нижню півплощину відкладено $\angle KPO = 120°$, а у верхню півплощину — $\angle KPN = 40°$. Знайдіть кут між бісектрисами цих кутів.

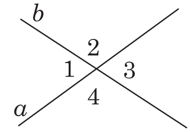
А	Б	В	Г	Д
100°	160°	90°	80°	70°

21. Знайдіть $\angle FOE$, якщо $\angle AOB = 45°$, $\angle COD = 25°$ (див. рисунок).

А	Б	В	Г	Д
110°	105°	112°	70°	інша відповідь



22. Прямі a і b перетинаються так, що $\angle 2 - \angle 3 = 64°$ (див. рисунок). Знайдіть $\angle 4$.

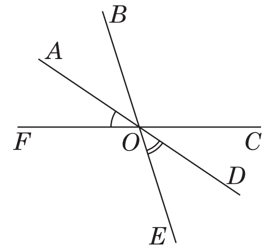


А	Б	В	Г	Д
110°	122°	64°	98°	інша відповідь

23. Промінь OC — бісектриса кута AOB. Знайдіть кут AOB, якщо кут між бісектрисами кутів AOC і COB дорівнює 80°.

А	Б	В	Г	Д
100°	110°	120°	150°	160°

24. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle AOF = 26°$, $\angle EOD = 58°$ (див. рисунок).



А	Б	В	Г	Д
84°	86°	92°	94°	96°

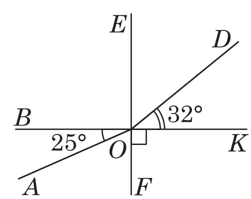
25. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1 Кут між бісектрисами двох суміжних кутів дорівнює ...
2 Кут між бісектрисами двох вертикальних кутів дорівнює ...
3 Якщо суміжні кути відносяться, як 5:13, то більший кут дорівнює ...

А 180°.
Б 130°.
В 45°.
Г 90°.
Д 144°.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

26. Установіть відповідність між сумою кутів (1–3) та значенням цієї суми (А–Д) (див. рисунок), якщо $BK \perp EF$.



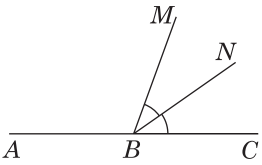
1 $\angle AOF + \angle FOK =$
2 $\angle BOA + \angle EOD =$
3 $\angle AOF + \angle EOD =$

А 145°
Б 155°
В 83°
Г 93°
Д 123°

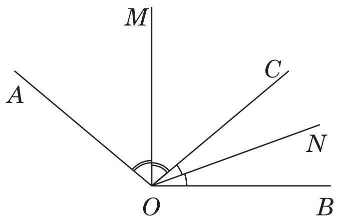
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

27. Установіть відповідність між прямими, які перетинаються (1–3), та значенням невідомого кута (А–Д).

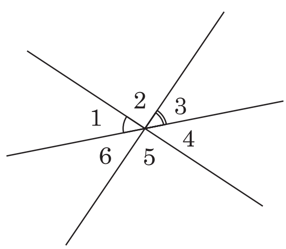
1 BN — бісектриса кута MBC,
$\angle ABM : \angle NBC = 5 : 2$, $\angle MBC = ?$



2 $\angle AOB = 140^\circ$, OM і ON — бісектриси кутів AOC і COB, $\angle MON = ?$



3 $\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 3 = 41^\circ$, $\angle 5$ — ?

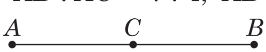


А 84°
Б 80°
В 100°
Г 70°
Д 96°

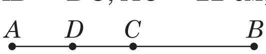
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

28. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д).

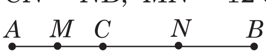
1 $CB = 9$ см, $AB : AC = 7 : 4$, $AB = ?$



2 $AC = CB$, $AD = DC$, $AC = 22$ см, $BD = ?$



3 $AM = MC$, $CN = NB$, $MN = 12$ см, $AB = ?$



А 12 см
Б 48 см
В 33 см
Г 24 см
Д 21 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

29. Із вершини кута AOB проведено промені OC і OD так, що кут AOC дорівнює 30°, кут COB дорівнює 100°, а кут DOB дорівнює 45°. Знайдіть кут AOD.

Відповідь. ____________________________

30. Знайдіть менший із кутів між двома прямими, які перетинаються, якщо сума двох кутів, що утворилися, на 80° менша від суми двох інших кутів.

Відповідь. ______________________

31. Трьома променями, що мають спільний початок, розгорнутий кут поділено на чотири кути, один з яких менший від інших відповідно у 2, 3, 4 рази. Знайдіть величини цих кутів.

Відповідь. ______________________

32. На прямій позначено точки A, B і C так, що $AB = 16$ см, $AC = 7$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC. Розгляньте усі можливі варіанти розташування точок A, B і C.

Відповідь. ______________________

Тема 2. Взаємне розміщення прямих на площині

Теоретичні відомості

1. Взаємне розміщення трьох прямих на площині

Взаємне розташування двох прямих на площині подано в попередній темі. Можливі два випадки: дві прямі перетинаються й утворюють пари вертикальних і суміжних кутів, дві прямі не перетинаються, тобто паралельні. Окремий випадок перетину двох прямих — їхня перпендикулярність.

Розглянемо взаємне розташування трьох прямих на площині.

1) Три прямі на площині паралельні (рис. 1), тобто $a \parallel b \parallel c$.

2) Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 2). Утворюється три пари вертикальних кутів.

Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$. Тобто, сума усіх кутів при перетині кількох прямих в одній точці становить 360°.

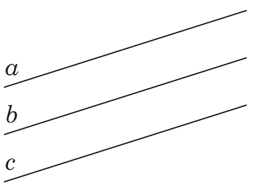


Рис. 1

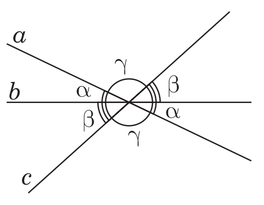


Рис. 2

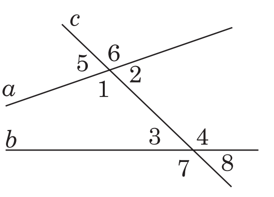


Рис. 3

Означення 1. Пряма, яка перетинає дві інші прямі у двох точках, називається *січною*.

3) Дві прямі перетинає третя пряма у двох точках (рис. 3). Пряма c — січна.

При перетині січною двох інших прямих утворюються різносторонні кути, односторонні кути та відповідні кути.

Різносторонні кути: $\angle 1$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 5$ і $\angle 6$.

Односторонні кути: $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$, $\angle 3$ і $\angle 7$.

Відповідні кути: $\angle 5$ і $\angle 3$, $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 6$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 8$.

2. Ознаки паралельності прямих

1. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Тобто, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

2. Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні (рис. 4).

Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то $a \parallel b$.

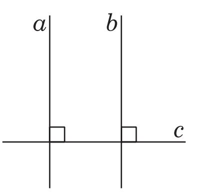


Рис. 4

3. Якщо при перетині двох прямих січною буде виконуватися одна з умов:

1) різносторонні кути рівні;

2) відповідні кути рівні;

3) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то дані прямі паралельні (рис. 5).

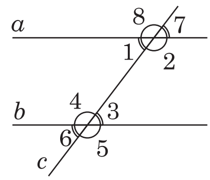


Рис. 5

Доведення. Доведемо твердження 1).

Нехай пряма c не перпендикулярна жодній із прямих a і b.

Позначимо точкою C середину відрізка AB (рис. 6). Через точку C проведемо перпендикуляр до прямої a, який перетинає пряму a у точці M, а пряму b — у точці N.

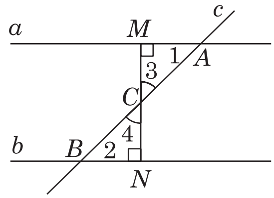


Рис. 6

За умовою, $\angle 1 = \angle 2$, як внутрішні різносторонні, $\angle 3 = \angle 4$, як вертикальні, $AC = CB$, за побудовою. Отже, $\Delta AMC = \Delta BNC$, за стороною і прилеглими кутами. Звідси $\angle AMC = \angle CNB = 90°$. Оскільки, прямі a і b перпендикулярні до прямої MN, то вони паралельні.

При доведенні теореми використано рівність трикутників (див. тему 3).

Означення 2. Спільний перпендикуляр між двома паралельними прямими називають *відстанню між паралельними прямими.*

На рисунку 6: MN — відстань між прямими a і b.

3. Властивості паралельних прямих

Дві паралельні прямі перетинає третя пряма (січна) (рис. 7).

1) Внутрішні різносторонні кути рівні, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

2) Відповідні кути рівні, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$.

3) Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, тобто $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Приклад 1. Три прямі a, b і c перетинаються в одній точці (рис. 8) так, що $\angle 1 = 25°$, $\angle 5 = 106°$. Визначте градусні міри решти кутів.

Розв'язання. Маємо пари вертикальних кутів, а саме: кути 1 і 4, $\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 6$. Тоді $\angle 1 = \angle 4 = 25°$, $\angle 2 = \angle 5 = 106°$.

Оскільки $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, то $\angle 3 = 180° - (25° + 106°) = 49°$. $\angle 3 = \angle 6 = 49°$.

Відповідь. $\angle 4 = 25°$, $\angle 2 = 106°$, $\angle 3 = \angle 6 = 49°$.

Приклад 2. Прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x, зображеного на рис. 9. **(ЗНО, 2007 р.).**

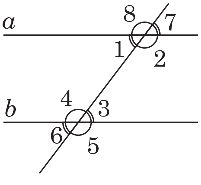


Рис. 7

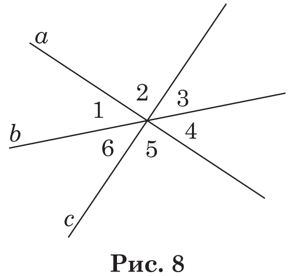


Рис. 8

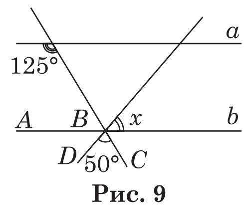


Рис. 9

Розв'язання. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle ABC = 125°$, як відповідний заданому куту 125°. Тоді $\angle ABD = 125° - 50° = 75°$. Кут x — вертикальний куту 75°. Отже, $\angle x = 75°$.

Відповідь. 75°.

Приклад 3. Один із односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною у 5 разів більший за другий. Знайдіть менший із цих кутів.

Розв'язання. Якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. Нехай менший із цих кутів дорівнює x. Тоді більший кут становить $5x$.

Отже, $x + 5x = 180°$, $6x = 180°$, $x = 30°$.

Відповідь. 30°.

Приклад 4. При перетині двох паралельних прямих січною внутрішні односторонні кути відносяться, як 5 : 7. Знайдіть більший кут.

Розв'язання. Якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. Нехай x — величина однієї частини від 180°. Тоді $5x + 7x = 180°$, $12x = 180°$, $x = 15°$.

Отже, більший кут становить $7 \cdot 15° = 105°$.

Відповідь. 105°.

Приклад 5 (опорна задача). Якщо дві паралельні прямі перетнути січною, то:

1) бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів паралельні;

2) бісектриси внутрішніх односторонніх кутів перпендикулярні.

Доведення. Доведемо перше твердження. Нехай прямі AB і NC — паралельні (рис. 10), ME — січна, MN і EB — бісектриси кутів AME і MEC.

Оскільки $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle AME = \frac{1}{2}\angle MEC = \angle 2$, як внутрішні різносторонні кути, то прямі a і b — паралельні, за ознакою паралельності прямих.

Твердження 2 доведіть самостійно.

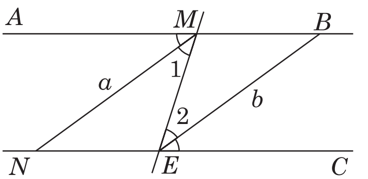


Рис. 10

Приклад 6. Різниця внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 102°. Знайдіть менший із цих двох кутів.

Розв'язання. Позначимо внутрішні односторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, як α і β. Тоді $\alpha + \beta = 180°$, звідси $\beta = 180° - \alpha$. Нехай $\alpha > \beta$. За умовою, $\alpha - \beta = 102°$.

Тоді $\alpha - 180° + \alpha = 102°$, $2\alpha = 282°$, $\alpha = 141°$. Звідси $\beta = 39°$.

Відповідь. 39°.

Приклад 7. Відомо, що $AB \perp ED$, $KM \perp ED$, $\angle ABE = 56°$, MN — бісектриса кута KMC (рис. 11). Знайдіть $\angle EMN$.

Розв'язання. Оскільки $AB \perp ED$ і $KM \perp ED$, то $AB \parallel KM$, за ознакою паралельності прямих. Тоді кути ABE і KME відповідні. Тому $\angle KME = \angle ABE = 56°$. Кут KMC є суміжним до кута KME.

Тоді $\angle KMC = 180° - \angle KME = 180° - 56° = 124°$.

Оскільки MN — бісектриса кута KMC, то $\angle KMN = \angle NMC = 124° : 2 = 62°$.

Отже, $\angle EMN = \angle KME + \angle KMN = 56° + 62° = 118°$.

Відповідь. 118°.

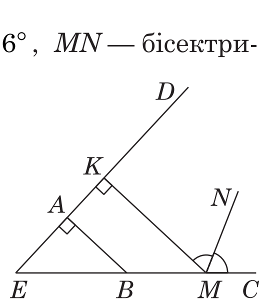


Рис. 11

Приклад 8*. $AB \parallel CD$, $\angle MAB = 70°$, $\angle MCD = 60°$ (рис. 12). Знайдіть градусну міру кута AMC.

Розв'язання. Через точку M проведемо пряму MN, паралельну AB і CD (рис. 13).

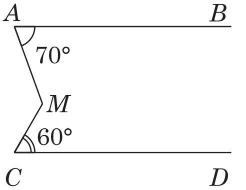


Рис. 12

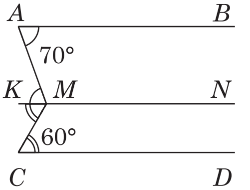


Рис. 13

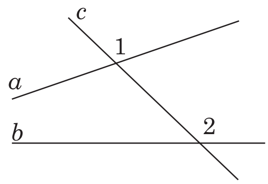
Тоді $\angle KMA = \angle MAB = 70°$, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і MN та січній AM. Аналогічно $\angle KMC = \angle MCD = 60°$.

Отже, $\angle AMC = \angle KMA + \angle KMC = 70° + 60° = 130°$.

Відповідь. 130°.

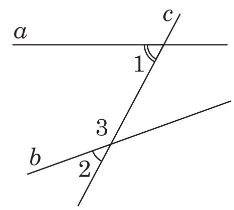
Тестові завдання

1. Як називають кути 1 і 2, зображені на рисунку?



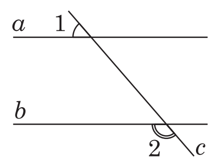
А	Б	В	Г	Д
різносто-ронні	відпо-відні	зовнішні	внут-рішні	внутрішні одно-сторонні

2. Відомо, що $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 35°$ (див. рисунок). Знайдіть градусну міру $\angle 3$.



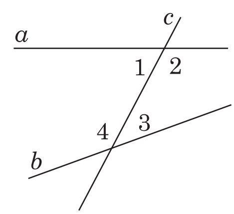
А	Б	В	Г	Д
65°	145°	35°	125°	135°

3. Прямі a і b — паралельні (див. рисунок), $\angle 1 = 55°$. Знайдіть $\angle 2$.



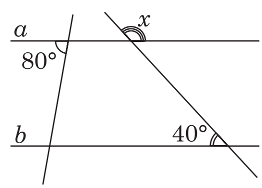
А	Б	В	Г	Д
55°	75°	115°	125°	135°

4. Чому дорівнює сума $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ (див. рисунок)?



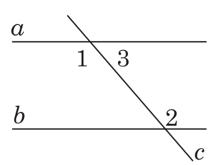
А	Б	В	Г	Д
180°	240°	320°	360°	540°

5. Якщо $a \parallel b$ (див. рисунок), то кут $x = ...$



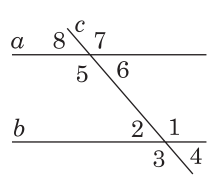
А	Б	В	Г	Д
140°	120°	110°	80°	40°

6. $\angle 1 = \angle 2$ (див. рисунок). Яке з наведених тверджень правильне?



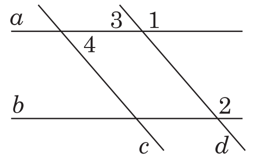
А	Б	В	Г	Д
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$	$\angle 2 + \angle 3 < 180°$	$\angle 2 + \angle 3 > 180°$	$\angle 1 + \angle 2 = 180°$	$\angle 2 + \angle 3 = 360°$

7. Відомо, що $a \parallel b$ (див. рисунок), $\angle 1 = 135°$. Знайдіть $\angle 8$.



А	Б	В	Г	Д
135°	145°	55°	45°	35°

8. Знайдіть градусну міру кута 2 (див. рисунок), якщо $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 50°$.

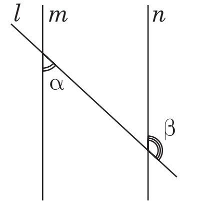


А	Б	В	Г	Д
140°	150°	130°	50°	40°

9. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другого. Знайдіть більший із цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
36°	72°	108°	144°	180°

10. Пряма l перетинає паралельні прямі m та n (див. рисунок). Визначте градусну міру кута α, якщо $\beta = 125°$. **(ЗНО, додаткова сесія, 2020 р.).**

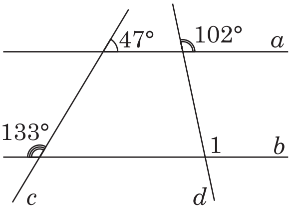


А	Б	В	Г	Д
35°	45°	55°	65°	75°

11. Відомо, що $a \perp b$, $a \perp c$. Яке із наведених тверджень є правильним?

А	Б	В	Г	Д
$c \perp b$	$c \parallel b$	пряма c є січною прямих b і a	пряма b є січною прямих a і c	правильної відповіді немає

12. Знайдіть величину кута 1, зображеного на рисунку.



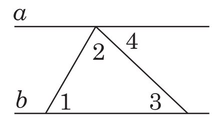
А	Б	В	Г	Д
102°	133°	258°	47°	78°

13. Які з тверджень 1) – 4) є правильними?

1) Якщо при перетині прямих a і b січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі a і b паралельні.
2) Якщо при перетині прямих a і b січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі a і b паралельні.
3) Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \perp c$.
4) Якщо промінь і відрізок не мають спільних точок, то вони паралельні.

А	Б	В	Г	Д
1) і 2)	1), 2), 3)	3) і 4)	1), 2), 4)	1) і 3)

14. На рисунку прямі a і b — паралельні. Обчисліть $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.



А	Б	В	Г	Д
90°	120°	160°	180°	360°

15. Які з наведених тверджень є правильними? **(ЗНО, 2014 р.).**

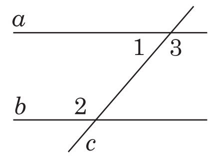
I. Сума двох будь-яких вертикальних кутів дорівнює 180°.

II. Сума двох будь-яких суміжних кутів дорівнює 180°.

III. Сума будь-якого гострого кута та будь-якого тупого кута дорівнює 180°.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише II і III	I, II і III

16. Пряма c перетинає паралельні прямі a і b (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними для кутів 1, 2, 3? **(ЗНО, 2012 р.).**



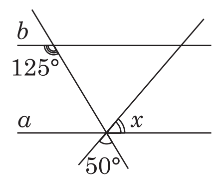
I. $\angle 1$ і $\angle 3$ — суміжні.

II. $\angle 1 = \angle 2$.

III. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

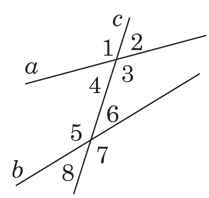
А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і III	лише III	лише I і II	I, II та III

17. Прямі a і b — паралельні. Знайдіть градусну міру кута x, зображеного на рисунку. **(ЗНО, 2007 р.).**



А	Б	В	Г	Д
50°	60°	65°	75°	85°

18. Відомо, що $\angle 2 = 55°$, $\angle 6 = 40°$ (див. рисунок). Обчисліть суму кутів 4 і 5.

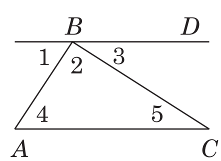


А	Б	В	Г	Д
180°	185°	190°	195°	205°

19. При перетині двох паралельних прямих січною внутрішні односторонні кути відносяться, як 4 : 6. Знайдіть найбільший кут.

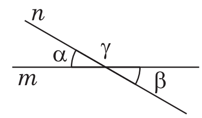
А	Б	В	Г	Д
108°	110°	112°	114°	116°

20. Пряма $BD \parallel AC$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 65°$ (див. рисунок). Обчисліть $\angle 4$.



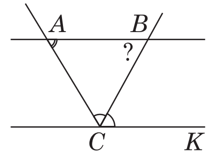
А	Б	В	Г	Д
105°	70°	80°	65°	75°

21. На рисунку зображено прямі m і n, що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ, якщо $\alpha + \beta = 50°$. **(ЗНО, 2016 р.).**



А	Б	В	Г	Д
130°	145°	155°	310°	140°

22. Прямі AB і CK — паралельні, CB — бісектриса кута ACK. Визначте градусну міру кута ABC, якщо $\angle BAC = 52°$ (див. рисунок). **(Пробне ЗНО, 2016 р.).**

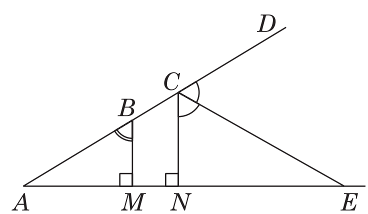


А	Б	В	Г	Д
38°	52°	64°	69°	128°

23. Різниця внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 102°. Знайдіть менший із цих двох кутів.

А	Б	В	Г	Д
41°	42°	39°	49°	38°

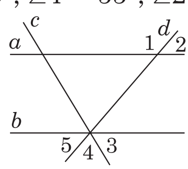
24. На рисунку $BM \perp AE$, $CN \perp AE$, CE — бісектриса кута NCD, $\angle ABM = 44°$. Знайдіть $\angle ACE$.



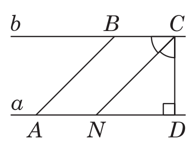
А	Б	В	Г	Д
110°	112°	114°	116°	118°

25. Установіть відповідність між взаємним розміщенням прямих (1–3) та значенням (А–Д) невідомого кута, що їм відповідає.

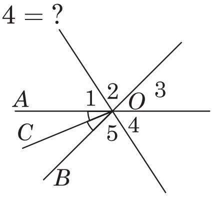
1 $a \parallel b$, $\angle 3 = 65°$, $\angle 4 = 55°$, $\angle 2 = ?$



2 $BC \parallel AD$, $AB \parallel CN$, $CD \perp AD$, CN — бісектриса, $\angle ABC = ?$



3 OC — бісектриса $\angle AOB$, $\angle AOC = 37°$, $\angle 2 = 66°$, $\angle 4 = ?$



А 110°
Б 40°
В 135°
Г 125°
Д 60°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

26. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1 Якщо один із внутрішніх односторонніх кутів, що утворився при перетині паралельних прямих січною, більший за іншого внутрішнього одностороннього кута на 36°, то більший із цих кутів дорівнює ...

2 Якщо внутрішні односторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, відносяться, як 4 : 5, то більший із цих кутів дорівнює ...

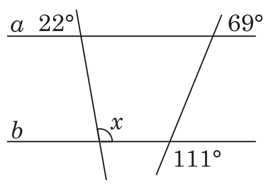
3 Якщо різниця двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, становить 44°, то більший із цих кутів дорівнює ...

А 112°.
Б 124°.
В 108°.
Г 144°.
Д 100°.

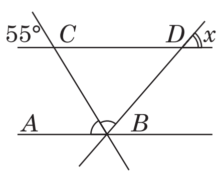
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

27. Установіть відповідність між взаємним розміщенням прямих (1–3) та значенням (А–Д) невідомого кута, що їм відповідає (А–Д).

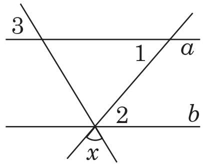
1 $\angle x = ?$



2 BC є бісектрисою кута ABD, $AB \parallel CD$, $\angle x = ?$



3 $a \parallel b$, $\angle 1 + \angle 2 = 110°$, $\angle 3 = 65°$, $\angle x = ?$

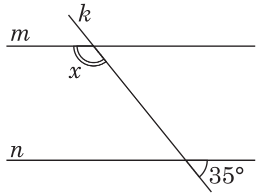


А 60°
Б 70°
В 80°
Г 158°
Д 148°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

28. Установіть відповідність між прямими, що перетинаються (1–3), та значенням (А–Д), пов'язаним з невідомим кутом або невідомими кутами.

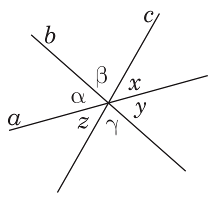
1 Якщо $m \parallel n$, то $x = \ldots$



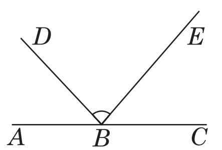
А 135°
Б 112°
В 180°
Г 145°
Д 160°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

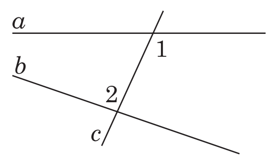
2 Якщо $\alpha + \beta + \gamma = 225°$, то $\angle x + \angle y + \angle z = \ldots$



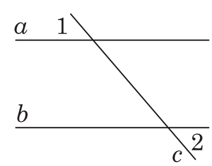
3 Якщо $\angle ABE = 128°$, $\angle CBD = 164°$, то $\angle DBE = \ldots$



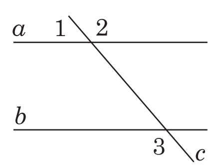
29. Знайдіть усі кути, які утворилися при перетині двох прямих січною, якщо $\angle 1 = 155°$, $\angle 2 = 35°$ (див. рисунок).
Відповідь. ________________________



30. На рисунку $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $a \parallel b$.



31. Знайдіть кут 3 (див. рисунок), якщо $\angle 2 - \angle 1 = 54°$, а прямі a і b паралельні.
Відповідь. ________________________



32. На рисунку $AB \parallel CD$. Знайдіть градусну міру кута AMC.
Відповідь. ________________________