АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Дійсні числа. Порівняння чисел та дії з ними

Тема 1. Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння і округлення чисел. Ознаки подільності. НСД і НСК. Арифметичні задачі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— властивості дій з дійсними числами; правила порівняння дійсних чисел;
— розрізняти види чисел та числових проміжків;
— порівнювати дійсні числа;
— виконувати дії з дійсними числами;
— використовувати ознаки подільності чисел на 2, 3, 5, 9, 10;
— знаходити найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне двох (кількох) чисел;
— знаходити неповну частку та остачу від ділення одного натурального числа на інше;
— перетворювати звичайний дріб у десятковий; округлювати цілі числа й десяткові дроби;
— використовувати властивості модуля до розв'язування задач;
— перетворювати нескінченний періодичний дріб у звичайний.

Натуральні числа — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, ... Множину натуральних чисел позначають буквою $\boldsymbol{N}$.

Цілі числа — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Цілими є числа –2, 4, 0 тощо. Множину цілих чисел позначають буквою $\boldsymbol{Z}$.

Раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Раціональними є числа 4,5; –3; –7,3; $-2\frac{7}{9}$ тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою $\boldsymbol{Q}$.

Ірраціональні числа — це нескінченні десяткові неперіодичні дроби. Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{2}$, $\cos 7°$, π тощо. Множину ірраціональних чисел позначають буквою $\boldsymbol{I}$.

Дійсні числа — це раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на *числовій осі*, а кожній точці числової осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою $\boldsymbol{R}$.

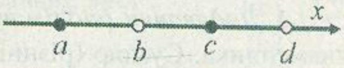

Рис. 1

Існують такі види числових проміжків (див. рис. 1): $[a;c];(b;d);[a;b);(b;c]$, де деякі з чисел можуть бути $\pm\infty$.

Звичайний дріб — це число виду $\frac{m}{n}$, де m та n — натуральні числа. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m : n$. Число n — *знаменник* дробу, число m — *чисельник* дробу.

Звичайний дріб також є відношенням. Усі властивості звичайних дробів є властивостями відношень. І навпаки.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, називають *правильним*. Дріб, у якому чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називають *неправильним*.

Наприклад, дроби $\frac{7}{13}$, $\frac{6}{24}$ — правильні, а дроби $\frac{21}{13}; \frac{12}{12}; \frac{14}{7}$ — неправильні.

Мішаним числом називають число, складене із натурального числа (*ціла частина*) і звичайного дробу (*дробова частина*). Мішане число є сумою цілої і дробової частини. Кожне мішане число можна записати як неправильний, у якого чисельник не ділиться на знаменник.

Наприклад, $5\frac{9}{11}$, $32\frac{3}{5}$ — мішані числа, $5\frac{9}{11} = 5 + \frac{9}{11}$.

З будь-якого неправильного дробу можна виділити цілу частину. Для цього досить поділити з остачею чисельник на знаменник. Частка від ділення буде цілою частиною, остача — чисельником, а дільник — знаменником. Наприклад, $\frac{37}{9}=4\frac{1}{9}$, бо 37 : 9 = 4 (ост. 1).

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад, $\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{5}{30}$; $\frac{200}{90}=\frac{200:10}{90:10}=\frac{20}{9}$.

Скороченням дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника. Якщо він дорівнює 1, то дріб називають *нескоротним*.

Наприклад, дріб $\frac{200}{90}$ скоротний, бо $\frac{200}{90}=\frac{200:10}{90:10}=\frac{20}{9}$, а дріб $\frac{9}{14}$ — нескоротний.

Будь-які два дроби можна звести до одного і того ж *спільного знаменника*. Спільним знаменником може бути будь-яке спільне кратне їх знаменників (наприклад, добуток знаменників). Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дріб до найменшого спільного знаменника, досить:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;

2) поділити це НСК на кожен знаменник і знайти додаткові множники для кожного дробу;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

Наприклад, звести дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника.

1) НСК(8, 6) = 24;

2) 24 : 8 = 3; 24 : 6 = 4. Числа 3 і 4 є додатковими множниками для дробів $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ відповідно;

3) $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{9}{24}$; $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$.

Дії над звичайними дробами

1. *Додавання (віднімання).* Щоб *додати* (*відняти*) дроби, треба спочатку звести їх до спільного знаменника. Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників, а знаменник дорівнює їх знаменнику:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \qquad \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}\right).$$

2. *Множення.* Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

3. *Ділення.* Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дробу-діленого та оберненого числа до дробу-дільника: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Наприклад:

1) $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}=\frac{2+3}{13}=\frac{5}{13}$;

2) $\frac{2^{\backslash 4}}{3}+\frac{3^{\backslash 3}}{4}=\frac{4\cdot 2+3\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$;

3) $\frac{1^{\backslash 3}}{6}+\frac{4^{\backslash 2}}{9}=\frac{3\cdot 1+2\cdot 4}{18}=\frac{3+8}{18}=\frac{11}{18}$;

4) $3\frac{1}{10}+6\frac{4}{15}=3+6+\frac{3\cdot 1+2\cdot 4}{30}=9+\frac{11}{30}=9\frac{11}{30}$;

5) $7\frac{4}{5}-3\frac{1}{4}=7-3+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}=4+\frac{16-5}{20}=4\frac{11}{20}$;

6) $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 5}=\frac{4}{45}$;

7) $3\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{7\cdot 8}{2\cdot 3}=\frac{56}{6}=9\frac{2}{6}=9\frac{1}{3}$;

8) $7:\frac{4}{9}=\frac{7}{1}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot 9}{1\cdot 4}=\frac{63}{4}=15\frac{3}{4}$;