

ТЕМА 1. НЕРІВНОСТІ

*На ці запитання потрібно знати відповідь,
а завдання — виконати*

1. Які знаки використовують для порівняння чисел?
2. Які нерівності називають строгими?
3. Які нерівності називають нестрогими?
4. Які нерівності називають числовими?
5. Які нерівності називають нерівностями зі змінною?
6. Як порівняти числа за допомогою координатної прямої?
7. Сформулюй правило порівняння чисел.
8. Сформулюй властивості числових нерівностей.
9. Розв'яжи вправи.
10. Підготуйся до самостійної діагностувальної роботи № 1.
11. Що таке множина? Як можна задати множину?
12. Що називають елементом множини?
13. Яку множину називають порожньою?
14. Як позначають множини та їх елементи?
15. Як позначають належність або неналежність елемента множині?
16. Назви основні способи задання множини.
17. Коли множину вважають заданою?
18. Які бувають множини?
19. Яку множину називають скінченною?
20. Яку множину називають нескінченною?
21. Яку множину називають числовою?
22. Назви найвідоміші числові множини.
23. Яку множину A називають підмножиною множини B ?
24. Які множини називають рівними?
25. Яку множину називають перерізом (добутком) множин A і B ?
26. Яку множину називають об'єднанням (сумою) множин A і B ?
27. Розв'яжи вправи.
28. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
29. Що означає розв'язати нерівність?
30. Розкажи про числові проміжки та їх види.
31. Які нерівності називають рівносильними?
32. На основі яких властивостей виконують заміну нерівності рівносильними їй нерівностями?
33. Розкажи про розв'язування найпростіших нерівностей, які містять змінну під знаком модуля.
34. Розв'яжи вправи.
35. Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?
36. Назви основні кроки розв'язування нерівностей, які зводяться до лінійних.

37. Розв'яжи вправи.
38. Підготуйся до самостійної діагностувальної роботи № 2.
39. Розкажи про системи нерівностей з однією змінною.
40. Що називають розв'язком системи нерівностей?
41. Що означає розв'язати систему нерівностей?
42. За якою схемою можна розв'язувати систему нерівностей з однією змінною?
43. Розв'яжи вправи.
44. Підготуйся до самостійної діагностувальної роботи № 3.
45. Перевір свої знання з теми 1.

*Я допомагаю тобі вивчити тему
«Нерівності»*



1. Які знаки використовують для порівняння чисел?

Для порівняння чисел використовують знаки « $<$ » — менше, « $>$ » — більше, « $\leq$ » — менше або дорівнює (не більше), « $\geq$ » — більше або дорівнює (не менше). Будь-який із цих знаків називають знаком нерівності.

Для порівняння чисел використовують також знак « $=$ » — дорівнює.

Поняття «нерівність» уперше з'явилося в працях давньогрецьких математиків Евкліда й Архімеда. Сучасні знаки « $<$ » та « $>$ » вперше застосував англійський математик Томас Герріот (1560–1621) у своїй праці, опублікованій посмертно в 1631 році. Він також займався вдосконаленням алгебраїчної символіки. Символи нестрогого порівняння « $\leq$ » та « $\geq$ » запропонував використовувати англійський математик Джон Валліс (1616–1703). Спочатку риска була вище від знаків строгої нерівності. Сучасного вигляду ці знаки набули після поширення їхнього написання французьким математиком П'єром Бугером (1698–1758).

Приклад 1. *Водій таксі працює за таким тарифним планом: під час посадки пасажиру нараховується фіксована сума 60 грн, а вартість кожного кілометра маршруту — 16 грн. Скільки повних кілометрів може проїхати пасажир, якщо в нього є 348 грн?*

Розв'язання

Нехай x — кількість кілометрів, які може проїхати пасажир. Тоді загальна вартість поїздки становить $(60 + 16x)$ грн. За умовою задачі, ця сума не

Приклад 5*. Доведи, що:

а) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, якщо a і b — будь-які числа;

б) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, якщо $x \geq 0, y \geq 0$;

в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ для будь-яких додатних чисел a і b .

Розв'язання

а) Доведемо, що різниця $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab$ є невід'ємним числом.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0. \text{ Отже, нерівність } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \text{ є}$$

правильною для будь-яких значень a і b .

Увага! Півсума квадратів будь-яких чисел не менша за їх добуток.

Дана нерівність була доведена французьким математиком Огюстеном-Луї Коші (1789–1857), одним із найвизначніших учених Франції. Він був відомий своєю працелюбністю. Його понад 800 наукових праць охоплюють майже всі галузі математики, він увів чимало нових понять, термінів і позначень, а також довів велику кількість теорем, які носять його ім'я.

б) Якщо в доведеній нерівності $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ замінити a і b на $\sqrt{x}$ і $\sqrt{y}$,

де $x \geq 0, y \geq 0$, то одержимо $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Ця нерівність була доведена Евклідом у X книзі «Начал» за допомогою геометричних міркувань. Евклід (435–365 р. до н. е.) — давньогрецький математик. Його книга «Начала» — математичний трактат, який складається із 13 книг. Коші в 1821 році узагальнив дану нерівність для будь-якої кількості чисел і довів її чисто математичними методами.

Вираз $\frac{x+y}{2}$ називають середнім арифметичним, а вираз $\sqrt{xy}$ — середнім геометричним.

Увага! Середнє арифметичне двох додатних чисел не менше за їх середнє геометричне.

в) Доведемо, що різниця $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$ для будь-яких додатних значень a та b є невід'ємним числом.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0. \text{ Отже, нерівність } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ справедлива для будь-яких додатних чисел } a \text{ та } b.$$

Увага! Сума обернених чисел не менша за 2.

Приклад 6*. Доведи: якщо дріб $\frac{x}{y}$ правильний, то правильною є нерів-

ність $\frac{x}{y} < \frac{x+1}{y+1}$, де x та y — натуральні числа.

Розв'язання

Складемо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+1} = \frac{x(y+1) - y(x+1)}{y(y+1)} = \frac{\cancel{xy} + x - \cancel{xy} - y}{y(y+1)} = \frac{x-y}{y(y+1)}. \text{ Оскільки дріб } \frac{x}{y}$$

правильний, то $x < y$. Тоді $x - y < 0, y > 0, y + 1 > 0$, тому $\frac{x-y}{y(y+1)} < 0$.

Отже, $\frac{x}{y} < \frac{x+1}{y+1}$.

8. Сформулюй властивості числових нерівностей.

Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$.

Властивість 2. Якщо $a < b, b < c$, то $a < c$.

Властивість 3. Якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$, тобто якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, змінивши знак доданка на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Властивість 4. Якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$ і $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, тобто якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне і те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.