

# ОГЛЯД

## Частина перша: ГЕБ

**Вступ: Музична посвята і задача на логіку.** Книгу відкриває розповідь про «Музичне приношення» Баха. Ідеться про те, як Бах зробив незапланований візит до короля Пруссії Фрідріха Великого і його попросили імпровізувати на тему, запропоновану королем. На основі цих імпровізацій і створено «Музичне приношення». Цей великий твір і його історія є темою, на яку я «імпровізую» впродовж усієї книги й у висліді цього створюю своєрідне «Метамузичне приношення». Відбувається обговорення автореференції та взаємодії різних рівнів у творі Баха; з цього природно випливає обговорення аналогічних ідей, що містяться у рисунках Ешера, а також у теоремі Геделя. Я зробив стислий огляд історії логіки та парадоксів, якими вона сповнена, у ролі підґрунтя для теореми Геделя. Це спонукає нас застановитися над феноменом механічного мислення і комп'ютерів, а також замислитися над тим, чи можливе існування штучного інтелекту. Цей розділ я закінчую поясненням причин створення цієї книги, зокрема обговорюю причини написання мною діалогів і їхнє призначення.

**Триголосна інвенція.** Бах написав 15 триголосних інвенцій. Із цього діалогу на три голоси читач може дізнатися, що Черепаха й Ахіллес – головні вигадані герої моїх діалогів – «придумані» Зеноном (як воно й було насправді, адже саме за допомогою цих персонажів Зенон унаочнював свої парадокси руху). Дуже стислий діалог просто дає нам змогу відчувати атмосферу майбутніх діалогів.

**Розділ I: Головоломка MU.** В цьому розділі презентована проста формальна система (система MIU), а далі читач може вправлятися у її розгадуванні, щоб ознайомитися з базовими принципами функціонування формальних систем загалом. Репрезентовано низку фундаментальних понять, як-от рядок, теорема, аксіома, правило виведення, саме виведення, формальна система, процедура прийняття рішень, робота всередині системи/поза системою.

**Двоголосна інвенція.** Бах написав також 15 двоголосних інвенцій. Цей діалог на два голоси написав не я, а Льюїс Керрол 1895 року. Керрол позичив своїх персонажів, Ахіллеса й Черепаху, в Зенона,

а своєю чергою позичив їх у Керрола. Темою цього діалогу є зв'язок між обґрунтуванням, обґрунтуванням слухності цього обґрунтування, обґрунтуванням того, що ця слухність своєю чергою слухна, тощо. Подібно до парадоксу Зенона, що свідчить про неможливість руху, цей діалог за допомогою нескінченного регресу засвідчує неможливість обґрунтування. Про цей красивий парадокс ми ще поговоримо в цій книзі згодом.

**Розділ II: Зміст і форма у математиці.** Тут представлена нова формальна система (pq-система), навіть простіша за систему MIU з розділу I. Символи цієї системи, що спершу здавалися безглуздими, раптово виявляються змістовними – це відбувається завдяки формі теорем, у яких вони постають. Це відкриття є першим кроком до розуміння значення і його глибокого зв'язку з ізоморфізмом. Потім настає черга обговорення різних проблем, пов'язаних зі значенням на кшталт проблем істини, доказовості, маніпуляцій із символами й ефемерного поняття «форми».

**Соната для Ахіллеса без супроводу.** Створення цього діалогу надихала Соната Баха для скрипки без супроводу. Зокрема цей діалог подібний до згаданої сонати тим, що Ахіллес у ньому – єдиний мовець, який реагує на нечутні репліки Черепахи на іншому кінці телефонного дроту. Розмова цих двох персонажів крутиться навколо понять «рисунок» і «тло» в різних контекстах, зокрема в контексті творчого доробку Ешера. Власне, діалог як такий ілюструє різницю між цими двома поняттями, позаяк репліки Ахіллеса утворюють «рисунок», а репліки Черепахи, що імпліцитно містяться в репліках Ахіллеса, утворюють «тло».

**Розділ III: Зміст і форма у математиці: Рисунок і тло.** Відбувається порівняння різниці між рисунком і тлом у мистецтві та різниця між теоремами й твердженнями, що теоремами не є, у формальних системах. Питання «Чи зберігає рисунок ту саму інформацію, що й тло?» приводить до різниці між рекурсивно зліченими множинами і рекурсивними множинами.

**Контраакровіршпункт.** Цей діалог є центральним у книзі, тому що містить низку парафраз автореферентної конструкції Геделя і його теореми про неповноту. Один із таких образних аналогів теореми стверджує: «Для кожного програвача існує платівка, яку на ньому не можна відтворити». Назва «Діалогу» становить щось середнє між словом «акровірш» і словом «контрапункт» – латинським словом, яке Бах вживав для позначення багатьох фуг і канонів, що входять до його «Мистецтва фуги». Тут містяться деякі прямі посилання на мистецтво фуги. У самому Діалозі імпліцитно містяться деякі акровірші.

**Розділ IV: Несуперечливість, повнота і геометрія.** Відбувається пояснення сенсу попереднього діалогу так, як це можливо на цьому етапі. Це повертає нас до запитання: як і коли набувають значення символи у формальній системі? Викладено історію евклідової та неевклідової геометрій як ілюстрацію ефемерного поняття «невизначених понять». Це спонукає застановитися над ідеями про узгодженість різних геометрій, які, можливо, «конкурують». На ґрунті цього обговорення постає визначення невизначених понять і відбувається розгляд зв'язку невизначених понять зі сприйняттям і процесами мислення.

**Маленький гармонійний лабіринт.** Цей Діалог подібний до однойменної композиції для органа Баха. Це грайлива форма пояснення поняття рекурсивних, тобто вкладених структур. Він містить історії в історіях. Засаднича історія, замість відповідати очікуванням і, зрештою, добігти кінця, залишається без завершення, тому читач відчуває розгубленість. Одна історія-вкладка містить виклад ідеї модуляції в музиці, зокрема там ідеться про органну п'єсу, яка закінчується в невідповідній тональності й викликає розгубленість у слухача.

**Розділ V: Рекурсивні структури та процеси.** Ідея рекурсії репрезентована в багатьох різних контекстах: музичні патерни, лінгвістичні патерни, геометричні структури, математичні функції, фізичні теорії, комп'ютерні програми тощо.

**Канон з інтервальним подовженням.** Ахіллес і Черепаха намагаються відповісти на запитання: «Що містить більше інформації – платівка чи програвач, який її відтворює?». Це дивне запитання постає перед ними, коли Черепаха розповідає про одну платівку, на якій, якщо її відтворювати на різних програвачах, звучать дві абсолютно різні мелодії: мелодії «В-А-С-Н» та мелодії «С-А-Г-Е».

**Розділ VI: Розташування значення.** Широке обговорення того, як відбувається розподіл значення між кодованим повідомленням, декодером і приймачем. Репрезентуються приклади цього розподілу – зокрема, ланцюжки ДНК, нерозшифровані написи на стародавніх табличках і платівки з мелодіями, що літають у космосі. Постулюється відношення інтелекту до «абсолютного» значення.

**Хроматична фантазія і спадкова ворожнеча.** Короткий діалог, який, якщо не зважати на назву, майже не нагадує «Хроматичну фантазію та фугу» Баха. Тут ідеться про коректний спосіб маніпуляції реченнями, який гарантує збереження їхньої істинності: зокрема з'ясовується, чи існують правила для виживання слова «і». Цей діалог має багато спільного з діалогом Льюїса Керрола.

**Розділ VII: Числення висловлень.** Розглянуто питання про те, як слова на кшталт «і» можуть впливати на правила формальної системи. Знову аналізуються ідеї ізоморфізму й автоматичного набуття значення символами в такій системі. Цікаво, що всі приклади в цьому розділі, є «реченнями дзен», взятими з коанів Дзен. Це зроблено свідомо і, слід зазначити, доволі зухвало, тому що дзен-коани – це від початку нелогічні історії.

**Канон Краба.** Діалог ґрунтується на однойменному творі з «Музичного приношення». В обох випадках мотивацією обрання цієї назви є те, що краби (імовірно) ходять навспак. Саме в цьому Діалозі вперше особисто з'являється персонаж Краб. Це, напевно, найщільніший діалог у книзі з погляду формальних ілюзій і рівня взаємозв'язку між різними ідеями. У цьому діалозі в найконцентрованішій формі репрезентовано перетини творчого доробку Геделя, Ешера й Баха.

**Розділ VIII: Типографська теорія чисел.** Тут репрезентоване розширення числення висловлень під назвою «ТТЧ». У ТТЧ виведення тверджень теорії чисел відбувається завдяки ригідним маніпуляціям із символами. Розглянуто різницю між людським мисленням і формальним виведенням тверджень.

**Посвята МУ.** Цей діалог є провісником кількох нових тем у книзі. На позір у ньому йдеться про дзен-буддизм і коани, але ці теми становлять лише тонкий покров, під яким сховано питання належності чи неналежності до теорем тих чи тих тверджень, істинності та хибності, рядків у теорії чисел. Є побіжні згадки про молекулярну біологію, зокрема про генетичний код. Окрім назви та певної автореферентної гри розуму, цей Діалог не має нічого спільного з «Музичним приношенням».

**Розділ IX: Мумон і Гедель.** Спроба розповіді про химерні ідеї дзен-буддизму. Центральною фігурою цього розділу є дзен-чернець Мумон, який дав добре відомі коментарі до багатьох коанів. З певного погляду ідеї дзен мають метафоричну схожість із деякими сучасними ідеями у філософії математики. Після цього занурення у дзен розглядається фундаментальна ідея Геделя щодо нумерації, названої на його честь, і поверхнево розглядається теорема Геделя.

## Частина друга: ЕґБ

**Прелюдія...** Цей діалог слід розглядати лише в контексті іншого діалогу, розміщеного відразу після розділу X. Цей Діалог у чомусь наслідує прелюдії та фуги «Добре темперованого клавіру» Баха. Ахіллес і Черепаха завітали до Краба з подарунком і побачили, що