УДК 371.32
М33

Рецензент: *Ярослав Гап'юк* — доцент кафедри математики і методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Математика. Міні-довідник для підготовки до зовнішМ33 нього незалежного оцінювання / Уклад. : А. М. Капіносов [та ін.]. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2021. — 192 с.
ISBN 978-966-07-2489-1
Посібник містить теоретичний матеріал з усіх тем математики. Зміст матеріалу відповідає вимогам чинної програми зовнішнього незалежного оцінювання та чинним навчальним програмам з математики.
Для абітурієнтів, учнів 11 класу, учителів математики.
УДК 371.32

ISBN 978-966-07-2489-1

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

1. Обчислення. Арифметичні задачі

Натуральні числа — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, ... Множину натуральних чисел позначають буквою N.

Цілі числа — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Цілими є числа –2, 4, 0 тощо. Множину цілих чисел позначають буквою $\boldsymbol{Z}$.

Раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число ($m \in Z$), n — натуральне число ($n \in N$). Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Раціональними є числа 4,5; –3; –7,3; $\frac{3}{4}$; $-2\frac{7}{9}$ тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою $\boldsymbol{Q}$.

Ірраціональні числа — це нескінченні десяткові неперіодичні дроби. Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{5}$, $\cos 7°$, π тощо. Множину ірраціональних чисел позначають буквою I.

Дійсні числа — це раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на числовій осі, а кожній точці числової осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою $\boldsymbol{R}$.

Прості та складені числа

Натуральне число називають *простим*, якщо воно має лише два дільники: одиницю і саме число. Найменше просте число — 2. Наприклад, число 19 має два дільники (1 і 19), тому воно є простим.

Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше, ніж два дільники. Число 6 має чотири дільники (1, 2, 3 і 6), тому воно є складеним.

Число 1 має лише один дільник, тому воно є ні простим, ні складеним.

Розкласти складене число на прості множники означає записати дане число у вигляді добутку простих чисел — дільників даного числа. Наприклад, $12600 = 7 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.

Взаємно простими числами називають числа, які не мають спільних дільників, крім одиниці. Наприклад, $65 = 5 \cdot 13$, $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$, тому числа 65 і 306 — взаємно прості.

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох натуральних чисел називають найбільше число, на яке дані числа діляться без остачі. НСД даних чисел дорівнює добутку спільних простих множників цих чисел.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох натуральних чисел називають найменше число, яке ділиться без остачі на кожне з даних чисел. НСК даних чисел дорівнює добутку одного з них на прості множники, яких нема його розкладі, але є у розкладах решти чисел.

Якщо числа a та b — взаємно прості, тобто НСД$(a; b) = 1$, т НСК$(a; b) = a \cdot b$. Наприклад, оскільки числа 9 і 25 є взаємно простим (НСД(9; 25) = 1), то НСК(9; 25) = $9 \cdot 25 = 225$.

Звичайним дробом називають число виду $\frac{m}{n}$, де m та n — натуральні числа. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m : n$.

Число n — *знаменник* дробу — вказує, на скільки рівних частин поділи ли число (величину), число m — *чисельник* дробу — скільки таких части узято.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, називають *правильни* Дріб, у якому чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, назив ють *неправильним*. Наприклад, дроби $\frac{7}{12}$, $\frac{16}{23}$, $\frac{8}{44}$ — правильні, а дроб $\frac{20}{13}$, $\frac{99}{33}$, $\frac{15}{15}$ — неправильні.

Число, яке складається з натурального числа і звичайного дробу, наз вають *мішаним*. Наприклад, $4\frac{8}{11}$, $132\frac{2}{5}$ — мішані числа. Мішане числ можна записати у вигляді суми натурального числа і звичайного дробу. На приклад, $4\frac{8}{11} = 4 + \frac{8}{11}$.

Щоб записати мішане число у вигляді неправильного дробу, досить й го цілу частину помножити на знаменник дробової частини, до знайденог добутку додати чисельник і результат записати в чисельнику, а знаменн залишити тим самим. Наприклад, $5\frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{23}{4}$.

З будь-якого неправильного дробу можна виділити цілу частину. Дл цього досить поділити з остачею чисельник на знаменник. Частка від ділен буде цілою частиною, остача — чисельником, а дільник — знаменником. На приклад, $\frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}$, бо 38 : 9 = 4 (ост. 2).

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу по ножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дрі який дорівнює даному. Наприклад, $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}$; $\frac{100}{70} = \frac{100:10}{70:10} = \frac{10}{7}$.

Скороченням дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника і якщо він дорівнює 1, то дріб називають *нескоротним*. Наприклад, дріб $\frac{100}{70}$ скоротний, бо $\frac{100}{70} = \frac{100:10}{70:10} = \frac{10}{7}$, а дріб $\frac{9}{13}$ — нескоротний.

Заміну дробів з різними знаменниками відповідно рівними їм дробами з однаковими знаменниками називають *зведенням дробів до спільного знаменника.* Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дріб до найменшого спільного знаменника, досить:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;

2) поділити найменше спільне кратне на кожен знаменник і знайти додаткові множники для кожного дробу;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

Наприклад, звести дроби $\frac{7}{8}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника.
1) Найменше спільне кратне чисел 8 і 6 дорівнює 24; 2) 24 : 8 = 3; 24 : 6 = 4. Отже, числа 3 і 4 є додатковими множниками для дробів $\frac{7}{8}$ і $\frac{5}{6}$ відповідно; 3) $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$.

Дії над звичайними дробами

1. *Додавання і віднімання.* Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників цих дробів, а знаменник дорівнює їх знаменникам: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}\right)$.
Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба їх спочатку звести до спільного знаменника.

2. *Множення.* Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

3. *Ділення.* Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дробу-діленого та оберненого числа до дробу-дільника: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Наприклад: 1) $\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{2+3}{11}=\frac{5}{11}$; 2) $\frac{2}{3}^{\backslash 4}+\frac{1}{4}^{\backslash 3}=\frac{4\cdot 2+3\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$;

3) $\frac{1}{6}^{\backslash 3}+\frac{1}{9}^{\backslash 2}=\frac{3\cdot 1+2\cdot 1}{18}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}$; 4) $2\frac{1}{10}+7\frac{4}{15}=2+7+\frac{3\cdot 1+2\cdot 4}{30}=9+\frac{11}{30}=9\frac{11}{30}$;

5) $6\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}=6-2+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=4+\frac{16-15}{20}=4\frac{1}{20}$; 6) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$;

7) $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{11}{3}=\frac{5\cdot 11}{2\cdot 3}=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}$; 8) $\frac{2}{13}:\frac{3}{8}=\frac{2}{13}\cdot\frac{8}{3}=\frac{2\cdot 8}{13\cdot 3}=\frac{16}{39}$;

9) $5:\frac{4}{17}=\frac{5}{1}\cdot\frac{17}{4}=\frac{5\cdot 17}{1\cdot 4}=\frac{85}{4}=21\frac{1}{4}$; 10) $5\frac{4}{9}\cdot 1\frac{12}{21}=\frac{49}{9}\cdot\frac{33}{21}=\frac{{}^{7}\cancel{49}\cdot\cancel{33}^{11}}{{}_{3}\cancel{9}\cdot\cancel{21}_{3}}=\frac{7\cdot 11}{3\cdot 3}=\frac{77}{9}=8\frac{5}{9}$;

11) $3\frac{5}{11}:5\frac{5}{33}=\frac{38}{11}:\frac{170}{33}=\frac{38}{11}\cdot\frac{33}{170}=\frac{{}^{19}\cancel{38}\cdot\cancel{33}^{3}}{{}_{1}\cancel{11}\cdot\cancel{170}^{85}}=\frac{19\cdot 3}{1\cdot 85}=\frac{57}{85}$.

Числові вирази

Числовий вираз — це запис, який складається із чисел, об'єднаних знаками арифметичних дій, і дужок. Якщо в числовому виразі виконати зазначені дії, дотримуючись порядку виконання арифметичних дій, то одержимо число, яке називають *значенням числового виразу*.

Порядок дій у числовому виразі

Додавання і віднімання чисел називають *діями першого ступеня*, а множення і ділення — *діями другого ступеня*.

1. Якщо в числовому виразі немає дужок і він містить лише дії одного ступеня, то їх виконують за порядком запису зліва направо.

2. Якщо у виразі є дії першого та другого ступенів, а дужок немає, то спочатку виконують дії другого ступеня, а потім — дії першого ступеня.

3. Якщо у виразі є дужки, то спочатку виконують дії в дужках у порядку, зазначеному в п. 1 і 2.

Наприклад, у числовому виразі $25\cdot 296-17\cdot(300-7\cdot 40)+5\cdot 138$ порядок виконання арифметичних дій є таким:

$$25\overset{3}{\cdot}296\overset{6}{-}17\overset{4}{\cdot}(300\overset{2}{-}7\overset{1}{\cdot}40)\overset{7}{+}5\overset{5}{\cdot}138.$$

Десятковий дріб — інша форма запису звичайного дробу зі знаменником 10^n, де n — натуральне число. Наприклад, $\frac{4}{10}=0,4;\ \frac{53}{1000}=0,053;\ \frac{609}{10}=60,9$.

Дії над десятковими дробами

1. *Додавання, віднімання.* Щоб додати або відняти десяткові дроби, потрібно їх записати так, щоб однакові розряди були один під одним (або «кома під комою») і виконати дію. Якщо необхідно, то до одного з дробів можна дописати нулі праворуч. Наприклад, знайдемо суму 16,8 + 0,5347:

$$\begin{array}{r} +\ 16{,}8000 \\ 0{,}5347 \\ \hline 17{,}3347 \end{array}$$

2. *Множення.* Множать десяткові дроби, не зважаючи на коми, як натуральні числа, а в добутку відділяють комою праворуч стільки цифр, скільки їх є після коми в обох множниках разом. Наприклад,

$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}35 \\ 0{,}006 \\ \hline 0{,}00810 \end{array}$$

3. *Ділення.* Щоб поділити десяткові дроби, спочатку їх домножають на 10^n, де n — кількість цифр після коми в дільнику і перетворюють дільник у натуральне число. Кому в частці ставлять після завершення ділення цілої частини діленого. Наприклад, поділимо 3,12 на 2,6:

$$3{,}12 : 2{,}6 = 31{,}2 : 26$$

$$\begin{array}{r|l} -31{,}2 & 26 \\ \cline{2-2} 26 & 1{,}2 \\ \cline{1-1} -5\,2 & \\ 5\,2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Кожен звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу. Для цього потрібно чисельник поділити на знаменник. Наприклад, $\frac{14}{11}=1,272727...,\ \ \frac{7}{12}=0,5833333...,\ \ \frac{3}{8}=0,375.$

Періодом нескінченного десяткового дробу називають найменшу групу цифр після коми десяткового дробу, яка повторюється. Період записують раз, поміщаючи його в круглі дужки, наприклад, $1,27272727...=1,(27)$; $0,583333...=0,58(3)$; $0,375=0,375000...=0,375(0)$.

Кожен нескінченний десятковий періодичний дріб можна подати у вигляді звичайного.

Правило перетворення нескінченного періодичного дробу в звичайний

Щоб перетворити періодичний дріб у звичайний, потрібно від числа, яке стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду, і записати цю різницю чисельником звичайного дробу, а в знаменнику записати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді, і дописати стільки нулів, скільки цифр між комою і першим періодом. Наприклад:

1) $0,(24)=0,242424...=\dfrac{24-0}{99}=\dfrac{24}{99}=\dfrac{8}{33}$;

2) $2,5(3)=2,5333...=\dfrac{253-25}{90}=\dfrac{228}{90}=\dfrac{38}{15}$.

Модуль дійсного числа

Модулем (*абсолютною величиною*) *дійсного числа a* називають саме це число, якщо воно невід'ємне ($a\ge 0$), і протилежне йому число, якщо воно від'ємне ($a<0$), тобто:

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Наприклад, $|13|=13$; $|-9|=9$; $|0|=0$; $|\sqrt{5}-10|=-(\sqrt{5}-10)=10-\sqrt{5}$.

Модуль числа a дорівнює відстані на числовій осі від початку відліку до точки, яка позначає число a.

Додавання і віднімання раціональних чисел

1. Щоб *додати* два від'ємні числа, потрібно: 1) додати їхні модулі; 2) поставити перед одержаним результатом знак «–». Наприклад, $-6+(-2)=-8$.

2. Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно: 1) з'ясувати, модуль якого числа більший; 2) від більшого модуля відняти менший; 3) перед одержаним результатом поставити знак того доданка, модуль якого більший. Наприклад: а) $-5+12=7$; б) $-23,5+9,1=-(23,5-9,1)=-14,1$.

3. Щоб від одного числа *відняти* інше число, потрібно до зменшуваного додати число, протилежне до від'ємника: $a-b=a+(-b)$. Наприклад: а) $20-50=20+(-50)=-30$; б) $-20-50=-20+(-50)=-70$; в) $-20-(-50)=$ $=-20+(+50)=-20+50=30$.

Множення і ділення раціональних чисел

Добуток (частка) двох чисел з різними знаками є число від'ємне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел. Наприклад: а) $-0,25\cdot 5=-1,25$; б) $0,6:(-3)=-0,2$.

Добуток (частка) двох від'ємних чисел є число додатне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел. Наприклад: а) $-7\cdot(-9)=63$; б) $-24:(-8)=3$.

Пропорція

Пропорцією називають рівність двох часток (відношень): $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, або $a:b=c:d$. Числа a та d називають крайніми членами пропорції, b та c — середніми членами пропорції.

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів: $a\cdot d=b\cdot c$.

Прямо пропорційні величини

Дві величини називають *прямо пропорційними*, якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини збільшується в таку ж кількість разів: $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=k$ — коефіцієнт пропорційності.

Наприклад, якщо швидкість руху автомобіля постійна, то:

Час		*Відстань*		
2 год	$\downarrow$	120 км	$\downarrow$	$\dfrac{2}{8}=\dfrac{120}{480}$
8 год		480 км		

Обернено пропорційні величини

Дві величини називають *обернено пропорційними*, якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини зменшується в таку ж кількість разів: $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_1}{y_2}$. Наприклад, якщо відстань постійна, то:

Швидкість		*Час*		
40 км/ год	$\downarrow$	4 год	$\uparrow$	$\dfrac{40}{80}=\dfrac{2}{4}$
80 км/год		2 год		

Масштаб.

Масштаб — це відношення відстані на карті до відповідної відстані на місцевості. Наприклад, масштаб 1 : 100000 означає, що 1 см на карті відповідає 100000 см = 1000 м = 1 км на місцевості.

Стандартний вигляд числа.

Стандартним виглядом числа m називають його запис у вигляді $a\cdot 10^n$, де $1\le a<10$, $n\in Z$. Число n називають порядком числа m. Наприклад: $m=63000=6,3\cdot 10^4$; $k=0,0000014=1,4\cdot 10^{-6}$.

2. Відсотки

Відсотком (процентом) називають число одну соту. Отже, $\frac{1}{100}=1\%$; $100\%=\frac{100}{100}=1$; $50\%=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$; $25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

Тоді 100% числа a дорівнюють a, 50% числа a дорівнюють $\frac{1}{2}a$, 25% числа a становлять $\frac{1}{4}a$.

Щоб перетворити десятковий дріб у відсотки, потрібно помножити його на 100.

Щоб перетворити відсотки у десятковий дріб, потрібно число відсотків поділити на 100.

Наприклад: а) $0{,}002=0{,}002\cdot100\%=0{,}2\%$; $0{,}07=0{,}07\cdot100\%=7\%$; $1{,}34=1{,}34\cdot100\%=134\%$; б) $2{,}3\%=2{,}3\%:100\%=0{,}023$; $40\%=40\%:100\%=0{,}4$; $263\%=263\%:100\%=2{,}63$.

Аналогічно поступають і у випадку звичайних дробів. Наприклад:

а) $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot100\%=\frac{200}{3}\%=66\frac{2}{3}\%$;

б) $28\frac{4}{7}\%=28\frac{4}{7}\%:100\%=\frac{200}{7}:100=\frac{200}{7}\cdot\frac{1}{100}=\frac{2}{7}$.

Знаходження відсотків від числа

Приклад 1. Зарплата водія становить 3400 грн. Авансом йому виплатили 40% зарплати. Яку суму отримав водій?

■ 3400 грн — 100%;
x грн — 40%.

Складаємо пропорцію: $\frac{3400}{x}=\frac{100}{40}$. Тоді $x=\frac{3400\cdot40}{100}$; $x=1360$.

Отже, водій отримав 1360 грн.

Відповідь. 1360 грн. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) записати 40% десятковим дробом: $40\%=0{,}4$;

2) знайти дріб 0,4 від числа 3400: $3400\cdot0{,}4=1360$ (грн).

Для того щоб знайти p відсотків від заданого числа a, можна:

1) записати p відсотків десятковим дробом;

2) помножити число a на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти 13% від 40. $13\%=0{,}13$; $40\cdot0{,}13=5{,}2$.

Знаходження числа за його відсотками

Приклад 2. Робітникові виплатили авансом 1400 грн, що становить 35% його зарплати. Яка заробітна плата у робітника?

■ 1400 грн — 35%;
x грн — 100%.

Складаємо пропорцію: $\frac{1400}{x}=\frac{35}{100}$. Тоді $x=\frac{1400\cdot100}{35}$; $x=4000$.

Отже, заробітна плата робітника становить 4000 грн.

Відповідь. 4000 грн. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) записати 35% десятковим дробом: $35\%=0{,}35$;

2) знайти число за його дробом: $1400:0{,}35=4000$ (грн).

Для того щоб знайти число за відомою його частиною m і числом відповідних відсотків p, можна:

1) записати p відсотків десятковим дробом;

2) поділити m на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти число, якщо 19% його становлять 57. $19\%=0{,}19$; $57:0{,}19=300$.

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

Приклад 3. Сторожеві із зарплати 1800 грн виплатили авансом 720 грн. Який відсоток зарплати він отримав?

■ 1800 грн — 100 %;
720 грн — x %.

Складаємо пропорцію: $\frac{1800}{720}=\frac{100}{x}$. Тоді $x=\frac{720\cdot100}{1800}$; $x=40$.

Отже, сторож отримав 40% зарплати.

Відповідь. 40%. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) знайти відношення $\frac{720}{1800}=0{,}4$;

2) помножити одержаний результат на 100%: $0{,}4\cdot100\%=40\%$.

Для того щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b, можна:

1) знайти значення дробу $\frac{a}{b}$;

2) помножити його на 100%.