

О.С. Істер

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Теорія. Приклади. Вправи

Книга 2

- ✓ *Прогресії*
- ✓ *Текстові задачі*
- ✓ *Початки аналізу*
- ✓ *Планиметрія*
- ✓ *Стереометрія*



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512.1(075.3)

ББК 22.1я72

189

Відповідно до закону України «Про авторські та суміжні права» задачі з книги «Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы» за редакцією М. Сканаві використано як ілюстративний матеріал

Істер О.С.

I-89 Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 2 / О.С. Істер. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. — 576 с.

ISBN 978-966-10-3541-5

У посібнику викладено методи розв'язування задач зі шкільного курсу математики.

Друга книга посібника містить 36 занять, які охоплюють теми: «Прогресія», «Текстові задачі», «Початки аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія».

Посібник містить теоретичний матеріал (означення, основні математичні факти, теореми, формули, таблиці), приклади розв'язування завдань та вправи для самостійного виконання, що дозволяє використовувати його, не звертаючись до підручників.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх класів, класів та шкіл із поглибленим вивченням математики.

УДК 512.1(075.3)

ББК 22.1я72

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ.

ТЕОРІЯ. ПРИКЛАДИ. ВПРАВИ

Книга 2

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Кравчук Андрій*

Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 18.11.2013. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 34,2. Умовн. фарбо-відб. 34,2.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48

E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com

www.bohdan-books.com

Охороняється законом про авторське право.

Жодна частина цього видання не може бути відтворена

в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

ISBN 978-966-10-3541-5

© Навчальна книга – Богдан, 2014

Передмова

У пропонованому посібнику викладені методи розв'язування задач зі шкільного курсу математики.

Мета посібника — допомогти учням старших класів та абітурієнтам систематизувати свої знання, а також ознайомитися з деякими методами розв'язування задач, яким у школі з тих чи інших причин не приділяється достатньо уваги. Так, наприклад, набагато ширше, ніж у шкільних підручниках, викладено такі питання, як розв'язування рівнянь вищих степенів, тригонометричних та логарифмічних рівнянь, систем рівнянь, задачі на комбінації просторових тіл та багато інших питань.

Посібник буде корисним як учням загальноосвітніх класів, так і учням класів та шкіл із поглибленим вивченням математики. Завдяки набутим знанням наполегливий читач не тільки відмінно складе державну підсумкову атестацію (ДПА) та зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО), а й «закладе фундамент» для успішного навчання у вищому навчальному закладі.

Пропонований посібник стане у пригоді вчителям як під час індивідуальних, так і під час групових занять, дозволить не тільки провести системне повторення шкільного матеріалу, а й розглянути, у разі необхідності, окремі теми чи розділи.

Посібник містить теоретичний матеріал (означення, основні математичні факти, теореми, формули, таблиці), приклади розв'язування завдань та вправи для самостійного виконання. Така структура посібника дозволяє використовувати його, не звертаючись до підручників.

Як працювати з посібником

Посібник складається із занять, які повністю охоплюють теми: «Прогресії», «Текстові задачі», «Початки аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія». Цих занять — 36. Кожне заняття має підпункти. У кожному підпункті детально викладено один з методів розв'язування певного класу або типу задач. Зазвичай, на початку кожного підпункту подано короткий теоретичний матеріал (означення, основні теореми і формули), який необхідно знати для розв'язування задач. Потім наведено конкретні приклади з використанням цього методу (формули, факти тощо). Весь задачний матеріал узято із найпопулярнішого протягом останніх сорока років збірника задач для вступників до вищих навчальних закладів за редакцією М.І. Сканаві (Київ, «Каннон», 1997 р.). Тому кожна задача має потрібну нумерацію: перше число позначає номер заняття, друге — порядковий номер задачі в цьому занятті, третє (в дужках) — його номер у шостому виданні збірника Сканаві і групу складності (А, Б чи В). У кожному занятті є 10–15 вправ для самостійного розв'язування, відповіді до яких подано наприкінці книги.

Працюючи з книгою, читач може або вивчати увесь пропонований матеріал, або вивчати лише ті розділи, які він вважає найскладнішими (наприклад, у випадку дефіциту часу на підготовку до ДПА чи ЗНО).

* * *

Читачі, які використовують іншу систему підготовки (наприклад, працюють з репетитором), можуть використовувати книгу як довідковий посібник. Для цього наприкінці книги подано зміст-класифікатор, що дає змогу читачеві швидко знайти метод, який його цікавить.

Також у додатку подано відповідність між номерами розв'язаних задач (за принципом: ліворуч — номер у збірнику Сканаві, праворуч — номер у цій книзі).

Розділ 1. Прогресії

Заняття 1

Арифметична прогресія

Арифметична прогресія – це послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, доданому до одного й того самого числа (це число називається **різницею** арифметичної прогресії).

Позначення

a_1 – перший член; d – різниця; n – число членів; a_n – n -й член;
 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – сума перших n членів.

Формули

$a_2 = a_1 + d; a_3 = a_2 + d; \dots; a_{n+1} = a_n + d;$	$d = a_{n+1} - a_n$
$a_n = a_1 + d(n-1)$ – формула n -го члена арифметичної прогресії	
$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$\dots, \underbrace{a_{n-k}, \dots, a_n}_{k \text{ кроків}}, \underbrace{\dots, a_{n+k}}_{k \text{ кроків}}, \dots$ $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},$ де $k < n$
Якщо $k + m = p + q,$ то $a_k + a_m = a_p + a_q$	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

Звичайно при розв’язуванні задач на арифметичну прогресію всі невідомі виражають через a_1 і d (і при необхідності n). Склавши рівняння (чи кілька рівнянь), знаходимо ці величини, а потім те, що необхідно знайти в задачі.

Корисно знати таке: якщо числа a , b і c є послідовними членами арифметичної прогресії, то $2b = a + c$.

Маємо:

$$AK_1 = \frac{1}{4} AK; AM = \frac{2}{3} AK,$$

тоді

$$MK_1 = AM - AK_1 = \frac{2}{3} AK - \frac{1}{4} AK = \frac{5}{12} AK \text{ і } \frac{AM}{MK_1} = \frac{\frac{2}{3} AK}{\frac{5}{12} AK} = \frac{8}{5};$$

аналогічно $\frac{CM}{MF_1} = \frac{8}{5}$. Тобто $\triangle AMC \sim \triangle K_1MF_1$ (дві сторони пропорційні і однакові кути між ними) і

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle K_1MF_1}} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2,56.$$

Аналогічно $\frac{S_{\triangle CMB}}{S_{\triangle F_1ME_1}} = 2,56$ і $\frac{S_{\triangle BMA}}{S_{\triangle E_1MK_1}} = 2,56$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle K_1E_1F_1}} &= \frac{S_{\triangle AMC} + S_{\triangle CMB} + S_{\triangle BMA}}{S_{\triangle K_1MF_1} + S_{\triangle F_1ME_1} + S_{\triangle E_1MK_1}} = \\ &= \frac{2,56(S_{\triangle K_1MF_1} + S_{\triangle F_1ME_1} + S_{\triangle E_1MK_1})}{S_{\triangle K_1MF_1} + S_{\triangle F_1ME_1} + S_{\triangle E_1MK_1}} = 2,56. \end{aligned}$$

Відповідь: у 2,56 разу.

Вправи

20.16 (10.086-А). На кожній медіані трикутника взято точку, що ділить медіану у відношенні 3:1, починаючи від вершини. У скільки разів площа трикутника з вершинами у цих трьох точках менша за площу початкового трикутника?

20.17 (12.006-А). У прямокутному трикутнику дано його площу S і гострий кут α . Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника до гіпотенузи.

20.18 (12.019-А). Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S , а протилежний основі кут між медіанами, проведеними до його бічних сторін, дорівнює α . Знайти основу.

20.19 (10.321-Б). Медіани трикутника дорівнюють 3; 4 і 5 см. Знайти площу трикутника.

4. Квадрат, прямокутник, ромб, вписані у трикутник.

Задача 20.20 (10.005-А).

У прямокутний трикутник з катетами a і b вписано квадрат, що має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр квадрата.

Розв'язання.

Квадрат $CTKN$ вписано у прямокутний трикутник ACB із катетами $AC = b$; $BC = a$ (рис. 130).

Позначимо $TK = TC = x$. $\triangle ATK \sim \triangle ACB$ (за двома кутами). Тоді

$$\frac{AT}{AC} = \frac{TK}{CB}; \quad \frac{b-x}{b} = \frac{x}{a}; \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Периметр квадрата $4x = \frac{4ab}{a+b}$.

Відповідь: $\frac{4ab}{a+b}$.

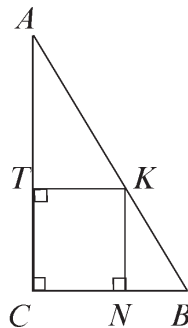


Рис. 130

Задача 20.21 (10.108-А).

Знайти площу квадрата, вписаного в правильний трикутник зі стороною a .

Розв'язання.

Квадрат $EFGH$ вписано у правильний трикутник ABC зі стороною a (рис. 131). Позначимо $EF = EH = x$.

Маємо $\triangle AEF \sim \triangle ACB$. Тоді

$$\frac{AL}{EF} = \frac{AK}{BC}.$$

$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – висота правильного

трикутника ABC . Маємо

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}; \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}.$$

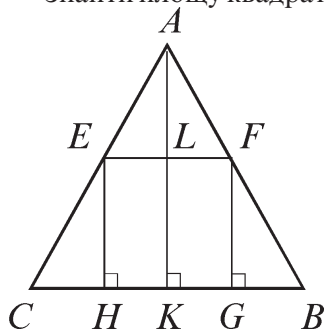


Рис. 131

Заняття 30.

30.5. $\frac{3\sqrt{3}}{2} h^2$. 30.6. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. 30.7. $4m^2 \sqrt{3}$. 30.19. $\frac{a^3}{24}, \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{2})$.
 30.20. $\frac{9\sqrt{2}}{8} \text{ см}^3$. 30.21. $\frac{\sqrt{3} l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha}{8}$. 30.22. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 30.23.
 $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{2}$. 30.24. $\sqrt{6}$. 30.25. $\frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{12}; \frac{a^2}{4} \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1)}$. 30.26.
 $\frac{\sin \alpha}{3} \sqrt{S \sqrt{3} \cos \alpha}$.

Заняття 31.

31.5. $\frac{l^3 \sqrt{3}}{12}$. 31.6. $3a^2; \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$. 31.7. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 31.8. $\frac{a^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)}$. 31.12.
 $\frac{3h^2 \sqrt{3}}{2}$. 31.13. $\frac{6\sqrt{1833}}{47}$. 31.15. $\frac{4S^4 \sqrt{3}}{2} \sin \alpha \sqrt{S \cos \alpha}$. 31.22. $\frac{1}{7}$.
 31.23. $2 \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. 31.24. $\arcsin \frac{2 \cos \tau}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{6} < \tau < \frac{\pi}{2}$. 31.25.
 $\operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{5} + 1}$. 31.26. $\sqrt{-k}, -1 < k < 0$.

Заняття 32.

32.3. $\sqrt{2} : 2$. 32.6. $2\sqrt{55} \text{ см}^3; 84 \text{ см}^2$. 32.9. $-\frac{1 + 3 \cos 2\alpha}{4}$. 32.12.
 $\arccos \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}; \arcsin \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$. 32.13. $\frac{l^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2 \beta} \sqrt{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)}$.
 32.16. $\frac{l^3 \sqrt{2}}{12}; \frac{l^2}{2} (2 + \sqrt{2})$. 32.17. $\frac{a^2 \sin \beta}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha)$. 32.21. $\frac{a^2}{12} \times$
 $\times \sqrt{4b^2 - 2a^2}$, якщо $a < b\sqrt{2}$. 32.22. $\frac{c^3}{36} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{3 \cos^2 + 1}$. 32.25.
 $\frac{m^2}{2} (\sqrt{2} + 2); \frac{m^3 \sqrt[4]{2}}{6}$. 32.26. 192 см^2 .

Заняття 33.

33.5. $\frac{c^3 \sqrt{3}}{48}$. 33.6. 108 см^3 . 33.7. $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}$. 33.8. $\frac{a^3}{12}$. 33.10.
 $\frac{2h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta}{3}$. 33.14. $\frac{8}{3} \sqrt{3} r^3; 24r^2$. 33.15. $\frac{1}{6} S \operatorname{tg} \beta \sqrt{S \sin \alpha}$. 33.17.

$$\frac{2048}{27} \text{ м}^3. \quad \mathbf{33.19.} \quad \frac{\sqrt{3}}{12} (a^3 - b^3). \quad \mathbf{33.23.} \quad 26,25 \text{ дм}^2. \quad \mathbf{33.24.} \quad \frac{\sqrt{2}}{6} (a^3 - b^3).$$

$$\mathbf{33.25.} \quad \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.$$

Заняття 34.

$$\mathbf{34.4.} \quad V=SC. \quad \mathbf{34.7.} \quad 2 \operatorname{arctg} \frac{4m}{\pi n}, \text{ якщо } m : n < \frac{\pi}{4} \text{ і } 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi n}{4m},$$

$$\text{якщо } m : n > \frac{\pi}{4}. \quad \mathbf{34.6.} \quad \frac{l}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}. \quad \mathbf{34.15.} \quad \frac{1}{3} r S. \quad \mathbf{34.16.} \quad \frac{1}{3} \pi R^3 \sqrt{15}.$$

$$\mathbf{34.17.} \quad \frac{\pi H^3}{12} \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha. \quad \mathbf{34.18.} \quad SL. \quad \mathbf{34.19.} \quad \frac{\pi h^3}{24}. \quad \mathbf{34.20.}$$

$$\arcsin \left(\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) \right). \quad \mathbf{34.22.} \quad \frac{7V}{27}. \quad \mathbf{34.25.} \quad \sin^4 \frac{\alpha}{4} \left(2 + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\mathbf{34.26.} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}.$$

Заняття 35.

$$\mathbf{35.5.} \quad 4\pi Q. \quad \mathbf{35.6.} \quad 600 \pi \text{ см}^2; 1000 \pi \text{ см}^3. \quad \mathbf{35.7.} \quad \frac{\pi c^3}{6} \sin 2\alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\mathbf{35.10.} \quad 3:2:1. \quad \mathbf{35.14.} \quad 4:9; 4:9. \quad \mathbf{35.15.} \quad 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}, \quad k \geq 2.$$

$$\mathbf{35.17.} \quad \frac{\pi l^3}{12} \sin^3 2\alpha. \quad \mathbf{35.19.} \quad \frac{\pi(r^2 + h^2)}{h^2}. \quad \mathbf{35.23.} \quad \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}. \quad \mathbf{35.24.}$$

$$\pi l^2; \frac{2\pi r}{3} (l^2 - r^2). \quad \mathbf{35.25.} \quad \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad \mathbf{35.27.} \quad \operatorname{arctg} \frac{2(4 + \sqrt{6})}{5}.$$

Заняття 36.

$$\mathbf{36.2.} \quad \frac{H^3 \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}. \quad \mathbf{36.4.} \quad \frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 2\alpha}{128 \sin^3 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}. \quad \mathbf{36.6.}$$

$$\frac{2\pi l^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{9 \sin 2\alpha}. \quad \mathbf{36.9.} \quad \frac{27\sqrt{2}}{8}. \quad \mathbf{36.11.} \quad \frac{3l^2 \sin^2 2\alpha}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}. \quad \mathbf{36.13.} \quad 2 \arcsin(\operatorname{tg} \alpha).$$

36.16. $\frac{4\pi h^3}{81}$. **36.17.** $8a^2 \cos\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **36.20.** $S_{\text{кулі}} : S_k = 2 : \pi$;
 $V_{\text{кулі}} : V_k = \pi\sqrt{3} : 2$. **36.23.** $\cos 2\alpha$; починаючи від основи. **36.24.**
 $\frac{a(3 + \cos 2\alpha)}{4 \sin 2\alpha}$. **36.30.** $6V$. **36.31.** $\frac{a^3}{2} (27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})$.

Зміст-класифікатор

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
	Передмова			3
	Розділ 1. Прогресії			5
	Заняття 1. Арифметична прогресія			5
1	Знаходження членів арифметичної прогресії, її різниці d і числа членів n .	4.004; 4.014; 4.031; 4.038; 4.070; 4.075	4.007; 4.011; 4.021; 4.067	6
2	Обчислення різних сум.	4.015; 4.041; 4.071	4.002; 4.039; 4.042	9
3	Текстові задачі.	4.001; 4.084	4.003; 4.006	11
4	Доведення властивостей і тверджень, що стосуються арифметичної прогресії.	4.037; 4.054; 4.057; 4.076	4.059; 4.074	13
5	Параметр і арифметична прогресія.	4.082		15
	Заняття 2. Геометрична прогресія			16
1	Знаходження членів геометричної прогресії, її знаменника q і числа членів n .	4.008; 4.036; 4.056; 4.062; 4.063; 4.072; 4.077	4.016; 4.017; 4.018; 4.019; 4.020; 4.022; 4.028; 4.047	17

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Обчислення різних сум і добутків.	4.051; 4.080; 4.081	4.065; 4.066	23
3	Текстові задачі.	13.373		26
4	Доведення властивостей і тверджень, що стосуються геометричної прогресії.	4.048; 4.053; 4.083.	4.058	28
5	Одна геометрична задача.	4.085 (10.251)		29
Заняття 3. Нескінченна геометрична прогресія при $ q < 1$. Комбіновані задачі				30
1	Нескінченна геометрична прогресія при $ q < 1$.	4.023; 4.043; 4.049; 4.052; 4.055	4.009; 4.010; 4.025; 4.030; 4.033	30
2	Комбіновані задачі на арифметичну і геометричну прогресії.	4.044; 4.046; 4.068; 4.069; 4.073; 4.078; 4.079	4.013; 4.040; 4.045; 4.064	35
Розділ 2. Текстові задачі				42
Заняття 4. Задачі на відсотки, концентрацію				42
1	Три види найпростіших задач на відсотки. Прості задачі на відсотки.	13.009; 13.034; 13.236; 13.323	13.003; 13.159	42

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Задачі на відсотковий приріст і обчислення “складних відсотків”.	13.007; 13.219; 13.315; 13.316	13.011; 13.013; 13.318	45
3	Задачі на концентрацію і відсотковий вміст.	13.002; 13.093; 13.247; 13.378; 13.413	13.008; 13.036; 13.041; 13.094; 13.309; 13.389	48
4	Переливання і відсотковий вміст.	13.443		53
Заняття 5 . Задачі з числами, цілочисельними величинами				55
1	Задачі, пов’язані з пропорцією, пропорційністю величин, частинами.	13.001; 13.018; 13.020; 13.028	13.015;13.016 ; 13.048	55
2	Використання десяткового запису числа.	13.086; 13.308; 13.358; 13.375; 13.377; 13.435	13.005;13.087; 13.100;13.338; 13.376	58
3	Подільність цілих чисел.	13.353; 13.434	13.305; 13.354	63
4	Задачі з цілочисельними величинами.	13.238; 13.249	13.063; 13.171	64

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Заняття 6. Задачі на рівномірний рух без сторонніх сил (течії, вітру тощо)				66
1	Ліквідація запізнення тілом, що рухається.	13.111; 13.399	13.116	66
2	Рух із зупинкою.	13.106	13.117	68
3	Рух двох тіл на однакову відстань з різними швидкостями.	13.216	13.085	69
4	Рух одного тіла на різні відстані з різними швидкостями	13.026	13.078; 13.222	70
5	Рух двох тіл на різні відстані з різними швидкостями.	13.221 13.263	13.103	71
6	Рух двох тіл назустріч один одному до моменту зустрічі.	13.391	13.311	73
7	Рух двох тіл назустріч один одному до моменту зустрічі з подальшим продовженням шляху в тому самому напрямку.	13.397	13.098	75
8	Рух двох тіл в одному напрямку і назустріч один одному.	13.418	13.167	76
9	Рух двох тіл в одному напрямку, одне з яких повертається, наздогнавши інше.	13.220	13.257	78

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
10	Рух трьох тіл в одному напрямку.	13.215; 13.267	13.254	80
11	Рух відносно нерухомого спостерігача (об'єкта).	13.419	13.284	82
Заняття 7. Задачі на рух				84
1	Рівноприскорений рух одного чи двох тіл.	13.262; 13.273	13.113; 13.356	84
2	Рух з урахуванням течії (вітру).	13.121; 13.130; 13.286; 13.387	13.128; 13.131; 13.223	86
3	Рух по ескалатору.	13.404	13.252	91
4	Задачі, пов'язані із середньою швидкістю.	13.277	13.089	93
5	Рух по взаємно перпендикулярних прямих.	13.382; 13.411	13.124	94
6	Рух тіл по сторонах трикутника.	13.365		96
7	Рух по колу.	13.298; 13.432	13.127; 13.302	97
8	Задачі, пов'язані з кількістю обертів.	13.194	13.051	101

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Заняття 8. Задачі на роботу і продуктивність праці.				103
1	Задачі на конкретну роботу.	13.024; 13.037; 13.226; 13.250	13.023;13.055; 13.185;13.328	103
2	Задачі на абстрактну роботу.	13.021; 13.213; 13.288; 13.383; 13.384	13.019;13.135; 13.227;13.292	106
3	Задачі на перекачування рідин насосами.	13.010; 13.253; 13.290; 13.293; 13.426	13.070;13.132; 13.142;13.242	110
Заняття 9. Текстові задачі економічного змісту				114
1	Зарплата і продуктивність праці.	13.012; 13.329	13.068	114
2	Задачі, пов'язані з вартістю товарів.	13.158; 13.212; 13.248; 13.367; 13.372; 13.379; 13.380; 13.442	13.154;13.162; 13.164;13.200; 13.334	115

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
3	Вартість товару і перевезення.	13.276; 13.381; 13.433	13.091;13.161;	124
4	Задачі на врожайність.	13.042; 13.076	13.054;13.163	128
Заняття 10. Різні текстові задачі				130
1	Задачі з векторами.	13.057; 13.191	13.344	130
2	Текстові задачі, пов'язані з геометрією.	13.201; 13.240; 13.244; 13.246; 13.251; 13.386; 13.440; 13.444	13.052;13.088; 13.148;13.152; 13.153;13.345	131
3	Задачі, пов'язані з квадратним тричленом.	13.343	13.189	139
4	Задачі, пов'язані з переливаннями.	13.327	13.243	139
5	Задачі, у яких число невідомих перевищує число рівнянь системи.	13.346; 13.403	13.341	141
6	Задачі, що розв'язуються за допомогою нерівностей.	13.361	13.370	142

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Розділ 3. Початки математичного аналізу				144
Заняття 11. Техніка диференціювання. Дотична до графіка. Геометричний зміст похідної				144
1	Обчислення похідної.	15.019; 15.021; 15.024; 15.032; 15.034; 15.035; 15.065	15.022;15.026; 15.036;15.037	144
2	Обчислення похідної в заданій точці.	15.039; 15.046; 15.047; 15.055; 15.068; 15.070;	15.042;15.044; 15.053;15.057; 15.062	148
3	Обчислення другої похідної.	15.060		151
4	Дотична до графіка функції. Геометричний зміст похідної.	15.063; 15.072; 15.087; 15.088; 15.091; 15.098; 15.106*	15.066;15.090; 15.092;15.093; 15.102	152
Заняття 12. Фізичний зміст похідної. Застосування похідної до знаходження сум, досліджень функцій				156
1	Фізичний зміст похідної.	15.082; 15.113; 15.114 15.116; 15.119	15.112;15.117; 15.118;15.120	156

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Застосування похідної до знаходження сум.	15.085*		159
3	Дослідження функцій на монотонність і екстремуми	15.067; 15.125; 15.141; 15.166; 15.170* 15.129; 15.131; 15.173; 15.174; 15.219	15.080;15.167; 15.128;15.130; 15.221;15.227	160
4	Побудова графіків функцій.	15.203; 15.212	15.204;15.211	166
Заняття 13.Найбільше і найменше значення функції. Параметр і похідна.				168
1	Найбільше і найменше значення функції.	15.146; 15.151*; 15.152*; 15.159*; 15.161; 15.064; 15.168; 15.169; 15.201	15.147;15.149; 15.154;15.156; 15.162;15.165	168
2	Текстові задачі на найбільше і найменше значення.	15.177; 15.187; 15.179; 15.181; 15.184; 15.186 15.194; 15.195	15.176;15.178; 15.183;15.185; 15.189;15.193; 15.197	176

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
3	Похідна і параметр.	15.084; 15.138; 15.126	15.071	184
Заняття 14. Первісна. Інтеграл і його застосування				186
1	Задачі з первісною.	15.076; 15.232; 15.234; 15.239	15.233;15.235; 15.236;15.238;	186
2	Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.	15.241; 15.242; 15.243; 15.244; 15.249; 15.251; 15.256; 15.257; 15.260; 15.261; 15.262	15.240;15.245 ;15.247;15.25 0;15.254;15.2 58;15.259;15. 263;15.265	189
3	Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла .	15.266; 15.269; 15.270; 15.273	15.267;15.268; 15.271;15.272	195
4	Застосування визначеного інтеграла у фізиці.	15.274	15.275	198

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Розділ 4. Планіметрія				200
Заняття 15. Прямокутний трикутник				200
1	Теорема Піфагора	10.001; 10.256; 10.269	10.051; 10.173	200
2	Властивість катета, що лежить проти кута 30° . Властивість медіани, проведеної до гіпотенузи.	10.021		202
3	Кол , вписане в прямокутний трикутник.	10.226; 10.264; 10.362	10.076; 10.252	203
4	Коло, описане навколо прямокутного трикутника.	10.305		205
5	Коло, вписане в прямокутний трикутник, і коло, описане навколо нього.	10.060; 10.104	10.050; 10.265	206
6	Площа прямокутного трикутника.	10.188; 10.296	10.166	207
7	Площа прямокутного трикутника як допоміжний елемент.	10.047; 10.223	10.262	208
8	Різні задачі.	10.412	10.332; 10.352	210
Заняття 16. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника. Рівносторонній трикутник				211
1	Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.	12.013; 12.132; 12.157; 10.365	12.151;12.158; 12.171	211

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві задач Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Теорема синусів. Теорема косинусів.	12.011; 10.361	12.131;12.188	214
3	Залежність між тригонометричними співвідношеннями в трикутнику і видом трикутника.	12.163	12.036	216
4	Рівносторонній трикутник.	12.030; 12.039; 10.027; 10.247; 10.268; 12.189; 12.405	10.010;10.037; 10.043;10.065; 12.139	217
Заняття 17. Медіани і бісектриси трикутника				224
1	Медіани трикутника. Формула медіани.	10.011; 12.023; 12.144; 10.215; 10.272; 10.327	10.008;10.263; 10.270	224
2	Точка перетину медіан.	10.221	10.266	228
3	Бісектриса трикутника. Формули для обчислення бісектриси.	10.079; 12.022; (12.192) 12.195	10.077;10.368	229
4	Властивість бісектриси трикутника.	10.136; 10.235; 12.422	10.049;10.277	231
5	Точка перетину бісектрис.	10.201	10.202	233

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
6	Перетин бісектриси трикутника і описаного кола.	10.372		234
Заняття 18. Площа трикутника				235
1	Знаходження площі трикутника.	10.158; 12.142; 12.155; 12.393; 10.400; 10.407	10.106;10.175; 10.187;10.328; 10.343	235
2	Площа як допоміжний елемент.	10.230; 12.180; 12.168; 10.227; 10.386	10.018;10.178; 12.035;10.258	240
3	Знаходження лінійних і кутових елементів, якщо дано площу.	12.041; 12.165; 12.402	10.095;12.185	244
Заняття 19. Висоти трикутника				247
1	Висота й інші лінійні елементи трикутника.	12.001; 10.371; 10.377; 10.390; 12.409	12.140;12.150; 12.161	247
2	Висота і площа.	10.032; 10.274; 10.381; (10.421) 10.406; 10.416	10.162; 10.271	252

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
3	Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника.	10.054; 10.059; 10.062; 10.316; 10.403	10.066;10.074; 10.094;10.211	256
Заняття 20. Подібність трикутників				260
1	Подібність трикутників і лінійні елементи.	10.224; 10.240; 10.245	10.261	260
2	Відношення площ подібних трикутників.	10.068; 10.282; 10.394; 10.409	10.098;10.135	263
3	Медіани і площа	10.329; 10.320; 10.326; 10.325; 10.353	10.086;12.006; 12.019;10.321	266
4	Квадрат, прямокутник, ромб, вписані у трикутник.	10.005; 10.108; 10.193; 10.200	10.058;10.207; 12.179	271
Заняття 21. Вписане й описане кола				274
1	Коло, вписане в трикутник.	10.055; 10.214; 10.244	10.072;10.090; 10.260	274
2	Коло, описане навколо трикутника.	10.203; 10.204; 10.287; 12.411	10.089;10.092	276

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
3	Вписане й описане кола.	10.009; 10.163; 10.253; 12.002; 12.395; 12.154;	10.078;10.206; 12.141	279
4	Коло, дотичне до двох сторін трикутника, центр якого лежить на третій стороні.	10.013; 10.213; 10.419	10.040;10.209	283
Заняття 22. Паралелограм і його види				285
1	Паралелограм.	10.038; 10.229; 12.391; 12.396; 12.399; 12.401	10.041;10.157; 10.232	285
2	Ромб.	10.031; 12.003; 12.147; 12.160	10.004;10.083; 10.311	292
3	Прямокутник.	12.017; 12.148	10.081;10.212	295
4	Квадрат.	10.023; 10.107; 12.004; 10.356	12.031;10.195	297

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		сторінка
		Задач	Вправ	
Заняття 23. Трапеція				300
1	Довільна трапеція.	10.024; 10.124; 10.238; 10.275; 12.136; 10.370; 10.376; (10.318) 10.413	10.042;10.167; 10.184;10.198	301
2	Прямокутна трапеція.	10.191; 12.033	10.057;10.231	307
3	Рівнобічна трапеція.	10.002; (10.071) 12.038; 12.137; 12.138	10.003;10.323; 12.194	309
4	Рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло.	10.007; 12.010; 10.199	12.018	312
5	Рівнобічна трапеція, діагоналі якої перпендикулярні.	10.319	10.134	314
Заняття 24. Чотирикутники. Многокутники				315
1	Описані чотирикутники.	12.024; 12.152	12.027;10.180	315
2	Вписані чотирикутники.	12.012; 10.243; 10.384; 10.418	10.217;12.197	318

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
3	Площа чотирикутника.	10.348; 12.400; 12.413	10.140	321
4	Площа неправильного многокутника.	10.109; 10.349; 10.375	10.100	325
5	Правильний многокутник.	10.110; 10.308	10.159	326
6	Правильний многокутник і коло.	10.025; 10.367 10.401	10.029; 10.112; 10.127	328
Заняття 25. Геометрія кола				331
1	Вписаний кут.	10.219		331
2	Величина кута, вершина якого лежить усередині круга (поза ним).	10.379		332
3	Діаметр і хорда.	10.257	10.425	334
4	Властивість хорд, що перетинаються.	10.014; 10.254; 12.181	10.017	335
5	Дотична і січна, проведені до кола з однієї точки	10.026; 10.307	10.012	338
6	Дві дотичні, проведені з однієї точки. Відстань від вершини трикутника до точки дотику вписаного кола зі стороною	10.363; 10.373; 10.405	10.034; 10.369	339

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
7	Довжина кола і дуги.	12.191	10.267	342
8	Спільна хорда двох кіл, що перетинаються.	10.045	10.143	343
9	Дотик кіл.	10.391	10.259	344
10	Спільна зовнішня дотична до двох кіл, що дотикаються зовні.	12.015; 10.192; 10.225; 10.366	10.006;10.015; 10.222	346
Заняття 26. Коло та його частини				350
1	Площа круга.	10.116; 10.299	10.168; 10.337	350
2	Площа кільця.	10.150; 10.154	10.137	352
3	Сектор і його площа.	12.175; 12.133; 10.338; (10.138) 10.399; (10.300)	10.115; 12.199	354
4	Коло, вписане в сектор.	10.016; 12.135	10.070;12.153	358
5	Сегмент і його площа.	10.114; 10.285; 10.155; 12.397	10.113;10.336 ;12.020	359
6	Кола, вписані в сегмент.	12.394		363

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Розділ 5. Стереометрія				365
Заняття 27. Правильна призма. Куб				365
1	Правильна трикутна призма.	11.049; 11.142; 12.080; (12.320)	11.052;12.109;	366
2	Правильна чотирикутна призма.	11.022; 11.060; 12.204; 12.338; 12.442	12.066;12.082; 12.101	368
3	Правильна шестикутна призма.	11.045; 11.067	11.034	372
4	Правильна восьмикутна призма.	11.107		374
5	Куб.	11.110; 11.123; 11.127; 11.197	11.035;11.179; 11.207;12.464	375
Заняття 28. Пряма і похила призми				378
1	Пряма трикутна призма.	12.051; 11.116; 11.124; 11.144; 11.198	11.059;12.057; 12.210;12.276	378
2	Пряма чотирикутна призма.	12.061; 11.117	12.100;11.156	383
3	Похила трикутна призма.	11.004; 11.125; 12.293; 12.446	11.048;11.131; 11.155	385

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
4	Похила чотирикутна призма.	11.020; 12.294	11.037; 12.303	390
Заняття 29. Паралелепіед				392
1	Прямий паралелепіед.	11.008; 11.043; 11.070; 12.209; 12.434	11.030;12.077; 12.124; 11.149	393
2	Прямокутний паралелепіед.	11.006; 11.073; 12.044; 12.062; 12.081; 11.165; 11.137	11.047;11.057; 11.102;12.287; 12.304	397
3	Похилий паралелепіед.	11.113; 11.151	11.118;11.166	403
Заняття 30. Піраміда. Правильна трикутна піраміда. Правильний тетраедр				406
1	Правильний тетраедр.	11.002; 11.007; 11.202; 12.450	11.053;11.066; 11.141	406
2	Правильна трикутна піраміда.	11.005; 11.015; 11.017; 11.019; 12.053; 11.119; 11.120; 11.134; 11.136; 12.206; 12.422	11.003(11.029); 11.051; 12.065; 12.070;12.104; 11.121(11.169); 12.203;12.224	410

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Заняття 31 . Правильна піраміда				420
1	Правильна чотирикутна піраміда.	11.010; 11.012; 12.220; 11.209	11.044;11.068; 12.084;12.324	420
2	Правильна шестикутна піраміда.	11.011; 11.106; 11.126	11.014;11.071	424
3	Правильна дванадцятикутна піраміда.	12.201	12.125	427
4	Правильна п'ятикутна піраміда.	11.229		429
5	Правильна n -кутна піраміда.	12.083		431
6	Формули переходу між кутами правильної піраміди.	12.344; 11.109; 12.290; 12.207	12.050;12.049; 12.068;12.235; 12.279	432
Заняття 32 . Октаедр. Неправильна піраміда				442
1	Октаедр.	11.036; 11.039	11.130	442
2	Трикутна піраміда, у якій бічні ребра (бічні грані) взаємно перпендикулярні.	11.145; 11.227	11.033	444
3	Трикутна піраміда, у якої бічна грань перпендикулярна до площини основи (висота піраміди належить бічній грані) чи дві бічні грані взаємно перпендикулярні.	11.133; 11.161	12.444	446

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
4	Трикутна піраміда, у якої дві бічні грані перпендикулярні до площини основи (одне з бічних ребер є висотою піраміди).	12.266; 12.218	12.113;12.277	448
5	Чотирикутна піраміда, у якої дві бічні грані перпендикулярні до площини основи (одне з бічних ребер є висотою).	11.160; 11.168	11.062;12.362	451
6	Шестикутна піраміда, у якої дві бічні грані перпендикулярні до площини основи (одне з бічних ребер є висотою).	11.146		453
7	Неправильна трикутна піраміда.	11.210; 11.215	11.162;12.384	455
8	Неправильна чотирикутна піраміда.	11.147; 12.415	11.112;11.138	457
Заняття 33 . Неправильна піраміда, вершина якої проектується в центр кола, описаного навколо основи чи вписаного в неї. Зрізана піраміда				461
1	Неправильна трикутна піраміда, вершина якої проектується в центр описаного кола.	11.018; 11.021; 11.158; 12.370	11.001;11.032; 12.286;11.201	462

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Неправильна чотирикутна піраміда, вершина якої проектується в центр описаного кола.	11.132	12.063	466
3	Неправильна трикутна піраміда, вершина якої проектується в центр вписаного кола.	11.040		467
4	Неправильна чотирикутна піраміда, вершина якої проектується в центр вписаного кола	12.223; 12.227	11.028;12.278	468
5	Зрізана піраміда.	11.148	11.074	470
6	Правильна трикутна зрізана піраміда	11.150	11.025	472
7	Правильна чотирикутна зрізана піраміда.	11.024; 11.122; 11.129	11.023;11.135; 11.157	473
8	Правильна восьмикутна зрізана піраміда.	11.108		477
Заняття 34 . Тіла обертання				478
1	Циліндр.	12.058; 12.069; 12.269	11.078;12.075; 12.271	478

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Скнаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
2	Конус.	11.076; 12.045; 12.048; 12.216; 12.230; 12.246; 12.267; 12.369	11.077;11.089; (11.195);12.054; 11.177;11.186; 12.261	482
3	Зрізаний конус.	12.047	11.100	491
4	Куля і її частини.	12.092* 12.310	12.236*;12.332*	492
Заняття 35 . Тіла обертання. Комбінації тіл				496
1	Тіла обертання.	11.092; 12.056; 11.178; 12.355*	11.090;11.091; 12.237	496
2	Відношення поверхонь і об'ємів тіл обертання.	11.103; 11.184	11.088	500
3	Куля, вписана в конус.	11.086; 11.221; 12.239	11.094;12.245	502
4	Півкуля, вписана в конус.	11.082	12.096	504
5	Конус, вписаний у кулю.	11.223	11.096	505
6	Куля, вписана в зрізаний конус.	12.238; 11.220 12.425	12.107;11.188; 12.217	506
7	Циліндр, вписаний у конус.	12.253	12.351	509

№	Тема	Номери зі збірника задач за редакцією М.І. Сканаві		Сторінка
		Задач	Вправ	
Заняття 36 . Комбінації многогранників і тіл обертання				510
1	Комбінація циліндра і призми.	12.231	12.268	510
2	Комбінація циліндра і піраміди.	12.387	12.321	511
3	Піраміда, описана навколо конуса.	12.363	12.367	512
4	Піраміда, вписана в конус.	12.085; 12.232	11.172	513
5	Комбінація призми і конуса.	12.274	12.128	515
6	Куля, вписана в призму.	12.295	12.248	516
7	Куля, вписана в піраміду.	11.187; 12.211	11.083;12.334	518
8	Куля, вписана в зрізану піраміду.	11.191		520
9	Призма, вписана в кулю.	11.095	11.093	522
10	Піраміда, вписана в кулю.	11.176; 12.350	12.093;12.234	523
11	Зрізана піраміда, вписана в кулю.	11.174		526
12	Комбінації кулі з многогранником.	11.228; 12.420		527
13	Комбінації многогранників.	12.200; 12.233	11.009;11.143	529
Додаток. Відповідність між номерами розв'язаних задач				533
Відповіді до вправ				541