В.А. Ясінський

Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.1я7
Я81

Рецензенти:

професор, заслужений учитель України
Лейфура В.М.

кандидат педагогічних наук
Матяш О.І.

Ясінський В.А.

Я81 Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. — 208 с.

ISBN 966-692-586-9 **ББК 22.1я7**

Книга розрахована на студентів спеціальностей «Математика», «Математика та інформатика», «Математика і фізика» педагогічних університетів та інститутів, вчителів математики та керівників математичних гуртків, а також учнів загальноосвітніх шкіл.

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути використана чи відтворена в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва.

Навчальне видання

Ясінський В'ячеслав Андрійович
Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування

Головний редактор *Б.Є. Будний*
Редактор *Г.Р. Турчин*
Художник *В.А. Басалига*
Комп'ютерна верстка *О.В. Побережник*

Підписано до друку 11.07.2005. Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Antiqua. Умовн. друк. арк. 12,09. Умовн. фарбо-відб. 12,09.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м.Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
publishing@budny.te.ua www.bohdan-books.com

© Ясінський В.А., 2005
© Навчальна книга – Богдан, макет, художнє оформлення, 2005

ISBN 966-692-586-9

§ 1. Метод математичної індукції

Теоретичні відомості

При розв'язуванні багатьох олімпіадних задач іноді використовують *метод математичної індукції*. Суть цього методу полягає у наступному. Нехай T_1, T_2, T_3, ... послідовність тверджень, причому відомо, що:

1) твердження T_1 істинне;

2) якщо деяке твердження T_k істинне, то наступне твердження T_{k+1} також істинне.

Тоді *принцип математичної індукції* стверджує, що всі твердження цієї послідовності істинні.

Спосіб міркувань, оснований на принципі математичної індукції, називають *методом математичної індукції*. При цьому доведення істинності твердження T_1 називають *базою індукції*, а доведення того, що з істинності твердження T_k випливає істинність твердження T_{k+1}, називають *індукційним кроком*.

Метод математичної індукції можна застосовувати не тільки для доведення, але і для задання послідовностей. Якщо ми задамо перший член послідовності і, припустивши, що k-й член вже заданий, за його допомогою задамо $(k+1)$-й, то згідно з принципом математичної індукції, вся послідовність буде заданою. Такий спосіб задання послідовності називають *рекурентним*.

Існують й інші форми принципу математичної індукції. Іноді зручно починати індукцію не з доведення істинності T_1, а з доведення істинності деякого T_k. Принцип індукції еквівалентний такій аксіомі: в довільній непорожній множині натуральних чисел є найменше.

Метод доведення деякого твердження для довільного натурального n оснований на такому принципі: якщо твердження справедливе для $n = 1$ та із справедливості його для $n = k$ випливає істинність цього твердження для $n = k + 1$, то це твердження справедливе для всіх натуральних n (*принцип математичної індукції*). Часто доведення за індукцією має форму «спуска»: доведення твердження для деякого натурального n зводиться до того, що твердження справедливе для деякого значення $n_1 < n$; тут використовується принцип індукції в такій формі: якщо твердження справедливе для $n = 1$ та (при $n > 1$) із справедливості його для всіх $k < n$ випливає справедливість для $k = n$, то твердження справедливе для всіх натуральних n. Іноді зручно починати індукцію не з $n = 1$, а з $n = 0$ чи деякого $n = n_0$.

Задачі

1.1 (7-8). Доведіть, що довільну суму, більшу 7 коп., можна сплатити монетами вартістю в 3 коп. та 5 коп.

1.2 (8-9). Дійсне число x таке, що $x+\dfrac{1}{x}$ — ціле. Доведіть, що для довільного натурального n число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ також ціле.

1.3 (9). Доведіть, що $1+3+6+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

1.4 (9-10). Нехай a — ціле непарне число, x та y корені рівняння $t^2+at-1=0$. Доведіть, що числа x^4+y^4 та x^5+y^5 — цілі і взаємно прості.

1.5 (9-10). Дано декілька квадратів загальної площі 1. Доведіть, що їх можна розмістити без накладань всередині квадрата зі стороною 2.

1.6 (9-10). Довести, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n. (Мається на увазі десятковий запис).

1.7 (9). Доведіть, що число $\left(1+\sqrt{2}\right)^{1981}$ можна подати у вигляді $a+b\sqrt{2}$, де a і b — взаємно прості цілі числа.

1.8 (9). Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом: $a_1 = m$, $m \in \mathrm{N}$ і $a_{n+1}=a_n+2^{a_n}$ для всіх натуральних n. Доведіть, що серед членів цієї послідовності знайдеться безліч чисел, які діляться на 3.

1.9 (10-11). Доведіть нерівність $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\le 3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ для всіх натуральних n.

1.10 (10-11). Послідовність $\{a_n\}$ додатних чисел неспадна, а послідовність $\{b_n\}$, де $b_k = a_{k+1}-a_k$ для всіх $k \in \mathrm{N}$, незростаюча. Доведіть, що послідовність $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ незростаюча.

1.11 (10-11). На площині задано набір із n векторів, довжина кожного з яких не перевищує 1. Доведіть, що, замінивши деякі вектори цього набору на протилежні, можна одержати набір векторів, сума яких має довжину: **а)** яка не перевищує $\sqrt{n}$; **б)** яка не перевищує $\sqrt{2}$.

1.12 (10-11). Опуклий многокутник будемо називати «красивим», якщо виконуються такі умови: **а)** кожна його вершина пофарбована в один з трьох кольорів; **б)** будь-які дві сусідні вершини многокутника пофарбовані в різні кольори; **в)** для кожного з трьох даних кольорів знайдеться принаймні одна вершина многокутника, пофарбована в цей колір. Доведіть, що будь-який «красивий» n-кутник ($n \ge 3$) можна розрізати діагоналями, які не перетинаються, на «красиві» трикутники.

1.13 (10-11). Доведіть, що для довільного натурального n справедлива рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ знаків кореня}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

1.14 (10-11). Доведіть, що при кожному натуральному n число $13 \cdot (-50)^n + 17 \cdot 40^n - 30$ ділиться на 1989.

1.15 (11). Знайдіть натуральні числа a, b, c, які не діляться на 10 і такі, щоб при будь-якому натуральному k у чисел $a^k + b^k$ та c^k були однаковими дві останні цифри.

1.16 (11). Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ і $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}$ для всіх $n \in \mathbf{N}$. Доведіть нерівність $a_n < 3$ для будь-якого номера n.

1.17 (11). Послідовність $\{x_n\}$ задана рекурентним способом: $x_1 = 0$ і $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ для всіх $n \in \mathbf{N}$. Доведіть, що всі члени послідовності, починаючи з другого, є натуральними числами.

1.18 (11). Дано n довільних квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, що із одержаних частин можна було б скласти один великий квадрат.

1.19 (11). На площині дано $2n + 1$ точок, які є вершинами опуклого $2n+1$-кутника. Побудуйте $2n + 1$-кутник, для якого ці точки є серединами його сторін.

1.20* (11). На скільки частин розбивають простір n сфер, кожні дві з яких перетинаються між собою?

Розв'язки, вказівки, відповіді

1.1. Індукцію ведіть по числу копійок. *База*. Суму в 8 коп., очевидно, можна сплатити. *Крок*. Припустимо, що нам вдалося сплатити суму в n копійок вказаними монетами. Якщо серед них є монета в 5 коп., то замінимо її на дві монети по 3 коп. і одержимо суму в $(n + 1)$ коп. Якщо ж всі монети суми по 3 коп., то їх не менше трьох і, замінивши три монети по 3 коп. на дві монети по 5 коп., ми також збільшимо суму на 1 коп.

1.2. Застосуйте індукцію по числу n. При цьому скористайтесь тотожністю

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

1.3. Індукційний перехід зводиться до перевірки рівності: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} +$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

1.4. Доведіть індукцією по числу n, що числа $x^n + y^n$ та $x^{n+1} + y^{n+1}$ — цілі та взаємно прості. *База*. $x^0 + y^0 = 2$; $x^1 + y^1 = -a$. За умовою a — непарне, тому a і 2 взаємно прості. *Крок індукції*. Нехай вже доведено, що $x^n + y^n$ та $x^{n+1} + y^{n+1}$ — цілі взаємно прості числа. Тоді $x^{n+2} + y^{n+2} = \left(x^{n+1} + y^{n+1}\right)(x + y) -$ $-x^{n+1}y - xy^{n+1} = -a\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) + \left(x^n + y^n\right)$ — ціле число. Нехай d — спільний дільник чисел $x^{n+2} + y^{n+2}$ та $x^{n+1} + y^{n+1}$. Тоді $x^n + y^n = x^{n+2} + y^{n+2} + a\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right)$ ділиться на d, тобто d — спільний дільник чисел $x^n + y^n$ та $x^{n+1} + y^{n+1}$.

Отже, $d = 1$, тобто НСД$\left(x^{n+1} + y^{n+1}; x^{n+2} + y^{n+2}\right) = 1$.

1.5. Доведіть за допомогою індукції (по числу n) таке твердження: n квадратів загальної площі S можна розмістити всередині квадрата зі стороною $2\sqrt{S}$. Для цього розгляньте найбільший з n квадратів.

1.6. Доведіть за допомогою індукції (по числу n). Скористайтесь тим, що відношення числа, яке записане за допомогою 3^{n+1} одиниць до числа, яке записане за допомогою 3^n одиниць дорівнює $100^{3^n}+10^{3^n}+1$ і ділиться на 3.

1.7. Методом математичної індукції доведіть більш загальне твердження: для кожного $n \in \mathbf{N}$ існують такі взаємно прості числа a_n і b_n, що виконується рівність $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$..

1.8. Доведіть за допомогою індукції (по числу n), що $a_{n+1} = m + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_n}$. Далі розгляньте остачі від ділення на 3 чисел виду 2^a, де $a \in \mathbf{N}$.

1.9. Індукційний перехід зводиться до доведення нерівності

$$\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \text{ для всіх } n \in \mathbf{N}.$$

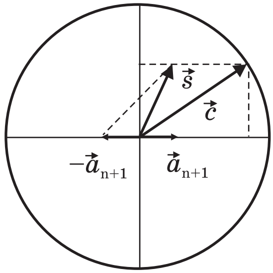
1.10. Доведіть за допомогою індукції (по числу n) таку нерівність: $\frac{a_n}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

1.11. Обидва твердження доводяться методом математичної індукції.

а) *База.* Якщо $n = 1$, то твердження очевидне: $|\vec{a}_1| \leq 1 = \sqrt{1}$. *Крок індукції.* Припустимо, що твердження задачі справедливе для довільного набору з n векторів, довжини яких не перевищують одиниці. Розглянемо довільний набір з $(n+1)$-го вектора $\left\{\vec{a}_1;\ \vec{a}_2;\ \ldots;\ \vec{a}_n;\ \vec{a}_{n+1}\right\}$, довжини яких не перевищують 1. За припущенням, замінивши деякі з векторів $\vec{a}_1;\ \vec{a}_2;\ \ldots;\ \vec{a}_n$ на протилежні, ми дістанемо набір векторів $\left\{\vec{b}_1;\ \vec{b}_2;\ \ldots;\ \vec{b}_n\right\}$ для якого виконується нерівність $|\vec{c}| \leq \sqrt{n}$, де $\vec{c} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n$. Покладемо $\vec{b}_{n+1} = \vec{a}_{n+1}$, якщо $\vec{c} \cdot \vec{a}_{n+1} < 0$, і покладемо $\vec{b}_{n+1} = -\vec{a}_{n+1}$, якщо $\vec{c} \cdot \vec{a}_{n+1} > 0$. Тоді набір $\left\{\vec{b}_1;\ \vec{b}_2;\ \ldots;\ \vec{b}_n;\ \vec{b}_{n+1}\right\}$ — шуканий, бо $\left|\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n + \vec{b}_{n+1}\right|^2 = \left|\vec{c} + \vec{b}_{n+1}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2 + 2 \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}_{n+1} + \left|\vec{b}_{n+1}\right|^2 \leq$

$$\leq \left|\vec{c}\right|^2 + \left|\vec{b}_{n+1}\right|^2 \leq n + \left|\vec{b}_{n+1}\right|^2 = n + \left|\vec{a}_{n+1}\right|^2 \leq n+1.$$

б) Для доведення скористайтесь рисунком. Якщо $|\vec{c}| \le 1$, то все доведено; якщо ж $1 < |\vec{c}| \le \sqrt{2}$, то коли $\vec{c} \cdot \vec{a}_{n+1} > 0$, ми за $\vec{b}_{n+1}$ візьмемо $-\vec{a}_{n+1}$, тоді (див.рис.) $\left|\vec{c} + \vec{b}_{n+1}\right| = |\vec{s}| \le |\vec{c}| \le \sqrt{2}$, що і треба було довести. У другому випадку потрібно покласти $\vec{b}_{n+1} = \vec{a}_{n+1}$.



1.12. Скористаємось методом математичної індукції.

База. При $n = 3$ твердження задачі очевидне: вершини «красивого» трикутника пофарбовані в три різні кольори і ніяких розрізів не треба.

Крок індукції. Припустимо, що твердження задачі справедливе для довільного «красивого» n-кутника ($n \ge 3$). Розглянемо довільний «красивий» $(n+1)$-кутник і доведемо, використовуючи припущення, що його можна розрізати вказаними діагоналями на «красиві» трикутники. Позначимо через $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ — послідовні вершини $(n + 1)$-кутника. Якщо в деякий з трьох кольорів пофарбована лише одна із вершин цього $(n + 1)$-кутника (а така ситуація можлива для «красивого» чотирикутника та п'ятикутника), то, з'єднавши цю вершину діагоналями зі всіма несусідніми з нею вершинами $(n+1)$-кутника, одержимо потрібне розбиття $(n + 1)$-кутника на «красиві» трикутники. Якщо ж в кожний з трьох кольорів пофарбовані дві вершини $(n + 1)$-кутника, то в цьому випадку в фарбуванні довільних вершин $(n + 1)$-кутника обов'язково беруть участь всі три кольори. Позначимо цифрою 1 колір, в який пофарбована вершина A_1, а цифрою 2 колір вершини A_2. Нехай k ($k \ge 3$) — найменший номер, такий, що вершина A_k пофарбована в третій колір. Відріжимо від $(n + 1)$-кутника трикутник $A_{k-2}A_{k-1}A_k$. Відповідно з вибором числа k всі вершини цього трикутника пофарбовані в три різні кольори (кожна в один з трьох), тобто цей трикутник «красивий». Многокутник $A_1A_2\ldots A_{k-2}A_kA_{k+1}\ldots A_{n+1}$, який залишився, також буде «красивим» і за припущенням розбивається на «красиві» трикутники.

1.13. Скористайтесь методом математичної індукції.

База. При $n = 1$ сформульоване твердження справедливе, бо $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$, і доведемо його справедливість при $n = k + 1$. Скористаємося тотожністю: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Використовуючи припущення індукції, одержуємо:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k+1\text{ знаків кореня}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

тобто при $n = k + 1$ твердження справедливе. Отже, вказана в умові задачі рівність, справедлива при всіх $n \in \mathbf{N}$.

1.14. Скористайтесь методом математичної індукції.

Нехай число $x_n = 13\cdot(-50)^n + 17\cdot 40^n - 30$ ділиться на 1989, тоді розглянемо число $x_{n+1} = 3\cdot 13\cdot 17\cdot\left(40^n - (-50)^n\right) + x_n$. Другий доданок: x_n — ділиться на 1989 за припущенням, а перший можна перетворити так

$$3\cdot 13\cdot 17\cdot\left(40-(-50)\right)\cdot\left(40^{n-1} + 40^{n-2}\cdot(-50) + \ldots + (-50)^{n-1}\right) =$$

$$= 1989\cdot 30\cdot\left(40^{n-1} + \ldots + (-50)^{n-1}\right).$$

Тут ми скористалися тотожністю:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

яку також можна довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно). Оскільки $x_1 = 0$ ділиться на 1989, то x_n ділиться на 1989 при всіх $n \in \mathbf{N}$.

1.15. $a = 4$, $b = 25$, $c = 29$. Далі, користуючись методом математичної індукції, доведіть, що при всіх натуральних k число $4^k + 25^k - 29^k$ ділиться на 100, тобто останні дві цифри чисел $4^k + 25^k$ та 29^k однакові.

1.16. Для доведення твердження задачі достатньо довести нерівність

$$a_n \le 3 - \frac{12}{2^n} \qquad (*)$$

для всіх $n \ge 3$ (оскільки $a_1 = 1 < 3$ і $a_2 = 1 < 3$). Доведемо (*) методом математичної індукції.

База. При $n = 3$ маємо: $a_3 = a_2 + \frac{a_1}{2^1} = \frac{3}{2} = 3 - \frac{12}{2^3}$. При $n = 4$ маємо: $a_4 = a_3 + \frac{a_2}{2^2} = \ = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} < 3 - \frac{12}{2^4}$.

Крок індукції. Припустимо, що нерівність

$$a_k \le 3 - \frac{12}{2^k} \qquad (**)$$

виконується при всіх $k = 3, 4, 5, \ldots, n, n+1$ $(n \ge 3)$. Доведемо, використовуючи це припущення, що нерівність (**) справедлива і для $k = n + 2$. Дійсно, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}$.