ГОТУЄМОСЯ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ТУРНІРІВ

# МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС 4–9 КЛАСИ

**Посібник для підготовки до математичних турнірів**

**Випуск 1**

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 519.11
ББК 74.262 я72
М66

Серію «Готуємося до математичних турнірів» засновано 2009 року

М66 Математичний конкурс. 4–9 класи: Посібник для підготовки до математичних турнірів. Випуск 1 / [упоряд.: Павлов О.Л., Бродський Я.С., Сліпенко А.К. та ін.]. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 64 с. (Серія «Готуємося до математичних турнірів»).

**ISBN 978-966-10-2270-5**

У посібнику представлені тексти завдань конкурсу «Золотий ключик», що проводився Центром математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем при Донецькому національному університеті в 2005 році. У ньому також містяться розв'язки і відповіді до всіх завдань.

Посібник призначений для підготовки школярів 4–9 класів до математичних олімпіад, конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик», «Кенгуру». Може бути використаний вчителями шкіл, ліцеїв, гімназій для проведення математичних змагань у навчальних закладах.

УДК 519.11
ББК 74.262 я72



**ISBN 978-966-10-0742-9** (серія)
**ISBN 978-966-10-2270-5**



# Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатись перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку він проводився для учнів Донецької області, згодом вийшов за її межі, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України, і врешті «Золотий ключик» офіційно набув статусу Всеукраїнського у відповідності з наказом міністра освіти та науки України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може безкоштовно взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

На очний тур запрошують усіх учнів, які виявили в заочному турі кмітливість, винахідливість, працьовитість і, звичайно, знання математики. Призерів очного туру нагороджують дипломами і подарунками в день проведення конкурсу, а також їм надають пільги у навчанні в ВМК. В останні роки, поряд з основним очним туром, проходять регіональні очні тури на базі шкіл, учні яких брали активну участь у конкурсі.

Завдання як заочного, так і очного турів складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки. А щодо нагород, дипломів, заохочень, то в цьому конкурсі вони теж є.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. Значна частина завдань пов'язана з практичними ситуаціями.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість задач не є оригінальними, основні ідеї, покладені в їх основу, запозичені з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптовані для конкурсу.

Для багатьох учнів з участі в конкурсі розпочинається навчання математики в Східноукраїнській заочній математичній школі (СУЗМШ) — заочному відділенні ВМК. Програма навчання у СУЗМШ і ВМК для 6–9 класів містить теми, спрямовані не лише на підвищення математичної підготовки учнів, але і на їхній розвиток.



Велику допомогу в проведенні конкурсу надають вчителі шкіл. Завдяки їм учні отримують інформацію про конкурс, завдання заочного туру, і навіть доставку робіт часто забезпечують саме вчителі. Деякі вчителі на базі матеріалів конкурсу організовують позакласну роботу, яка сприяє підготовці до конкурсу. Звичайно, головний тягар в організації конкурсу лягає на плечі викладачів, співробітників математичного факультету Донецького національного університету, Центру математичної і комп'ютерної освіти МІОТ, студентів математичного факультету. Завдяки їм конкурс процвітає і виконує неабияку роль у формуванні в учнів цікавості до математики.

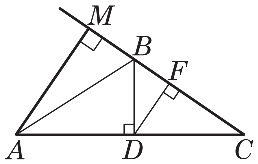
Матеріали конкурсу регулярно публікуються. У 2005 році оргкомітет Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» видав посібник з матеріалами «Золотого ключика» за попередні роки як приз для переможців конкурсу «Кенгуру».

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2006 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки вміщено в посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для учителів.

**6.** Перше твердження — площа трикутника менша від 1 – не є правильним. Наприклад, рівнобедрений трикутник з основою завдовжки 8 і з висотою, проведеною до цієї основи, завдовжки 0,3 має площу $\frac{8\cdot 0{,}3}{2} > 1$. Водночас довжина його висоти, проведеної до бічної сторони менша від $2\cdot 0{,}3 < 1$, оскільки в довільному рівнобедреному трикутнику довжина висоти, проведеної до бічної сторони, менша від подвоєної висоти, проведеної до основи. Для доведення цього факту достатньо провести перпендикуляр із середини основи до бічної сторони і порівняти його довжину з довжинами обох висот (див. рис.).




Застосовуючи той самий приклад, можна дійти висновку, що довжина бічної сторони більша від 3, і довжина медіани, проведеної на бічну сторону, більша від 1 згідно зі співвідношенням між сторонами і діагоналями паралелограма. Отже, друге твердження є неправильним. Неправильним є і четверте твердження (достатньо скористатися наведеним прикладом).

Твердження *В* є правильним. Нехай $h_a$, $h_b$, $h_c$ — висоти трикутника, проведені до сторін $a$, $b$, $c$. Тоді $ah_a = 2S = r(a + b + c)$, де $S$ — площа трикутника, $r$ — радіус вписаного кола. Звідси, $h_a = r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$. Якщо додати такі рівності для $h_a$, $h_b$, $h_c$ і скористатися нерівністю $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$, $x>0$, $y>0$, то отримаємо нерівність $9r \le h_a + h_b + h_c$.

За умовою, $h_a + h_b + h_c < 3$, тому $r < \frac{1}{3}$. ■

**Відповідь: В.** Радіус вписаного кола менше $\frac{1}{3}$.

**7.** Після перетворень рівняння набуває вигляду $\frac{x+1}{2x}=\frac{16}{31}$. ■

**Відповідь: Б.** Має один корінь: $x = 31$.

**8.** Після зменшення число $a$ стало дорівнювати $0{,}36a$, а арифметичний корінь з нього — $0{,}6\sqrt{a}$. Тобто число $\sqrt{a}$ зменшилось на $0{,}4\sqrt{a}$ або на $\frac{0{,}4\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\cdot 100\,\% = 40\,\%$. ■

**Відповідь: В.** 40.



**9.** Перший доданок ділиться на 3. Другий доданок $5^{13}$ при діленні на 3 дає ту саму остачу, що і $2^{13}$, тобто 2. Третій доданок $13^{17}$ при діленні на 3 дає ту саму остачу, що і $1^{17}$, тобто 1. Отже, дане число ділиться на 3. ■

**Відповідь: А.** 3.

**10.** Подамо дане рівняння у вигляді $(3x + 7y)^2 + (2x - 3)^2 = 0$. Отже, $x = 1{,}5$; $y = -\frac{9}{14}$. ■

**11.** Розглянемо квадратик розміром $2\times 2$, в якому рівно одна одиниця. Якщо за допомогою цих операцій весь великий квадрат можна заповнити нулями, то і в цьому квадратику в усіх клітинках стоятимуть самі нулі. Але цього зробити неможливо, оскільки при заміні чисел у стовпці або рядку цього квадратика парність кількості нулів у ньому не змінюється. Спочатку нулів у виділеному квадраті три, тобто непарна кількість. При будь-якій допустимій операції кількість нулів не буде парною, тобто ніколи не буде дорівнювати чотирьом. ■

**12.** Пронумеруємо всі яблука. Першим зважуванням визначимо вагу яблук 1 і 2, другим — 3 і 4, ..., п'ятим — 9 і 10. Підсумувавши ці результати, отримаємо вагу перших 10 яблук. Знайдемо вагу трьох яблук, що залишилися. Шостим зважуванням визначимо вагу яблук 11 і 12, сьомим — 12 і 13, восьмим — 11 і 13. Таким чином, кожне з цих яблук побуває на терезах рівно 2 рази. Тому, щоб отримати їх сумарну вагу, треба додати результати зважувань і поділити суму на 2. ■

## Зміст

*Навчальне видання*

Готуємося до математичних турнірів

Упорядники:

ПАВЛОВ Олександр Леонідович,
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович,
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович,
АМІРШАДЯН Артур Акопович,
ДВЕЙРІН Михайло Захарович

**МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС. 4–9 КЛАСИ**
**Посібник для підготовки до математичних турнірів**
**Випуск 1**

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Вікторія Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.10.2011. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 3,72. Умовн. фарбо-відб. 3,72.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

**ISBN 978-966-10-2270-5**