ГОТУЄМОСЯ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ТУРНІРІВ

І.Я. Клочко,
А.В. Кравчук

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72
К50

Серію “Готуємося до математичних турнірів” засновано 2009 року

Клочко І.Я., Кравчук А.В.
К50 Квадратний тричлен та його застосування. —
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 80 с.

ISBN 978-966-10-0852-5

У посібнику розглядаються властивості квадратного тричлена у ширшому обсязі, аніж у шкільних підручниках. Серед цих властивостей — необхідні і достатні умови існування та розміщення коренів квадратного тричлена, дослідження знаків тричлена на певних проміжках, дослідження зв'язків між двома заданими квадратними тричленами тощо.

Для вчителів та учнів 9-х, 10-х класів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-0852-5

Передмова

Якби в математиці не було краси, тоді, мабуть, не було б і самої математики. Бо яка тоді сила притягнула б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?!

М. А. Чайковський,
український математик

Поняття квадратного тричлена є одним із основних понять, які вивчаються у школі. У шкільному курсі алгебри розглядають лише найпростіші властивості квадратного тричлена, за допомогою яких виводять формулу коренів квадратного рівняння, будують графік квадратичної функції, знаходять найбільше та найменше значення квадратного тричлена, досліджують умови існування коренів та їхні знаки тощо. Проте існує велика кількість різноманітних задач, особливо олімпіадних, для розв'язання яких зазначених властивостей недостатньо.

У даному посібнику розглядається ряд властивостей квадратного тричлена, які розширюють можливості розв'язання таких задач. Серед цих властивостей — численні необхідні і достатні умови існування та розміщення коренів квадратного тричлена, дослідження знаків тричлена на деяких проміжках, дослідження зв'язків між двома заданими квадратними тричленами тощо.

Мета посібника:

1. Навчити розпізнавати квадратний тричлен у всіх його різноманітних формах і застосовувати властивості квадратного тричлена для розв'язання задач, які, на перший погляд, не мають нічого спільного з ним.

2. Систематизувати задачі, в розв'язаннях яких використовуються властивості квадратного тричлена.

3. Навчити здійснювати геометричну інтерпретацію таких задач.

4. Навчити досліджувати квадратний тричлен на всій числовій осі або на заданому числовому проміжку.

Посібник не дублює інші подібні видання, а доповнює і розширює їхній зміст. Він створений на основі задач, які пропонувалися на вступних іспитах у Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка (КНУ ім. Т. Шевченка), Національному університеті «Києво-Могилянська академія» (НаУКМА), Київському національному технічному університеті «Київський політехнічний інститут» (КНТУУ «КПІ») й інших вищих навчальних закладах, а також на основі задач міських та обласних олімпіад з математики.

Посібник загалом або окремі його частини можна використовувати для організації навчального процесу в 9-х, 10-х класах з поглибленим вивченням математики, для проведення факультативних занять у школі, для підготовки до олімпіад та різноманітних математичних турнірів, для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

1. Теорія квадратних тричленів

Означення 1. *Многочлен виду ax^2+bx+c, де a, b, c — деякі числа (коефіцієнти многочлена), до того ж, $a \neq 0$, x — змінна, називають* ***квадратним тричленом****. Число a називають* ***старшим коефіцієнтом****, b —* ***першим коефіцієнтом****, c —* ***вільним членом****.*

Теорія квадратних тричленів ґрунтується на методі виділення повного квадрата:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Виділивши повний квадрат, можна знайти корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0;\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};\ x_1=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

або $x_2=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Означення 2. *Число $b^2-4ac = D$ називають* ***дискримінантом*** *квадратного тричлена.*

Означення 3. *Числа $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ називають* ***коренями*** *квадратного тричлена.*

1) Якщо $D<0$, то тричлен дійсних коренів не має.

2) Якщо $D=0$, то $x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$ — тричлен має два однакових корені.

3) Якщо $D>0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Якщо перший коефіцієнт квадратного тричлена є парним числом, тобто $b = 2k$, то для знаходження його коренів зручно використовувати формули:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

В теорії квадратного тричлена важливе значення має теорема Вієта та обернена до неї теорема.

Теорема Вієта. Якщо корені квадратного тричлена існують, то їхня сума дорівнює $-\dfrac{b}{a}$, а добуток дорівнює $\dfrac{c}{a}$.

Обернена теорема Вієта. Якщо числа x_1 та x_2 такі, що:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

то вони є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, координатами вершини якої є числа $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ та $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$ — абсциса та ордината відповідно.

Розглянемо можливі випадки розміщення графіка квадратичної функції залежно від знаків D та старшого коефіцієнта (рис. 1).

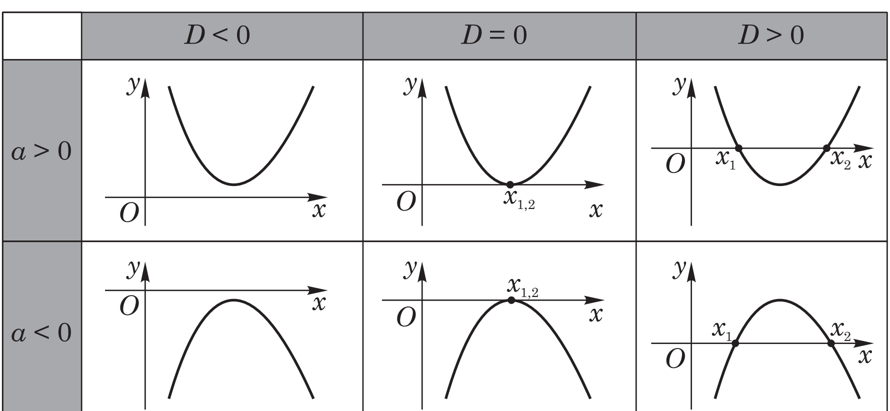

Рис. 1

Монотонність квадратичної функції.

Для того, щоб дати відповідь на питання про проміжки монотонності квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, запишемо її у вигляді: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

а) Якщо $a > 0$, то на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ функція спадає, на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ — зростає, при $x = -\frac{b}{2a}$ набуває найменшого значення $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 2, а).

б) якщо $a < 0$, то на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ функція зростає, на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ — спадає, при $x = -\frac{b}{2a}$ набуває найбільшого значення $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 2, б).

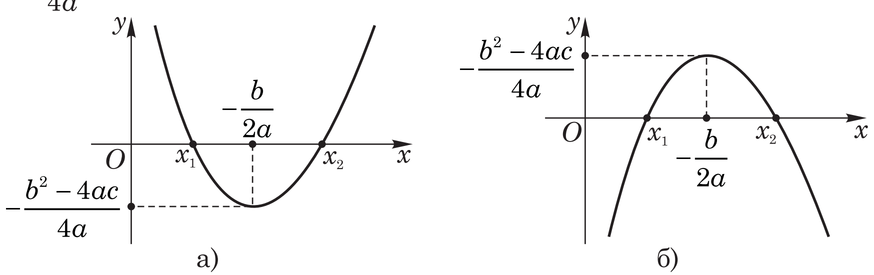

Рис. 2