Я.С. Бродський, В.Ю. Гречук,
О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко

Стереометрія
у старшій школі

Посібник для вчителя

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
С79

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики та методики викладання математики
Донецького національного університету
Г.В. Горр,
викладач математики ліцею при Донецькому національному університеті,
вчитель-методист
С.М. Васильєв

Бродський Я.С., Гречук В.Ю., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
С 79 Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. — 404 с.

ISBN 966-692-556-7

Пропонований посібник присвячено проектуванню вивчення геометрії в 10–11 класах. Він є засобом управління навчальним процесом з використанням інших елементів комплекту зі стереометрії, який складається з підручника, дидактичних матеріалів та збірника тестів.

У цьому виданні для кожної теми визначені основна мета і базовий рівень навчання, наведені загальні методичні рекомендації, в яких пояснюються особливості викладення матеріалу, розставляються наголоси, визначаються пріоритетні питання, яким слід приділити найбільше уваги на уроках, наводяться рекомендації щодо планування вивчення навчального матеріалу, методичні розробки тем, підтем, поради і матеріали для контролю та ін.

Значне місце займають методичні рекомендації щодо використання контрольних запитань і задач з підручника, а також дидактичних матеріалів. Для базових задач наведено повні розв'язання, а для решти — стислі або вказівки щодо їхнього розв'язування.

Для вчителів математики, студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів, методистів.

ББК 22.1я72

ISBN 966-692-556-7

Передмова

Методичний посібник адресовано вчителям математики, які працюють у профільних класах природничо-математичного напрямку (природничого, фізико-математичного, технічного та інших профілів) за таким пробним підручником:

[П] Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Геометрія. 10–11 класи. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.

Рекомендації зорієнтовано на застосування посібників:

[Д] Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з геометрії. 10–11 класи. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005.

[Т] Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Тести з геометрії. 10–11 класи. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004.

Разом з ними цей посібник складає навчально-методичний комплект для навчання стереометрії у профільних класах природничо-математичного напрямку відповідно до програми:

[Пр] Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К., Афанасьєва О.М. Програма з математики для 10–11 класів природничого напрямку/Програми факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Навчальна книга, 2003.

Посібник складається з шести розділів. У першому розділі розглядаються загальні питання методики навчання геометрії у старшій школі, характеризується згаданий навчально-методичний комплект, даються поради щодо організації навчального процесу. Кожен з наступних п'яти розділів присвячено відповідній темі курсу стереометрії.

Структура цих розділів однакова. Вона складається з:

— характеристики теми й основних завдань її вивчення;

— загальних методичних рекомендацій щодо навчання матеріалу теми;

— методичних рекомендацій щодо навчальних модулів, на які поділяється тема і які складаються з невеликої кількості навчальних питань, об'єднаних змістом;

— рекомендацій щодо організації тематичного контролю.

Підрозділи, пов'язані з навчальними модулями, водночас містять, крім основних завдань вивчення матеріалу модуля, рекомендації щодо:

— забезпечення готовності учнів до вивчення матеріалу модуля;

— викладення теоретичного матеріалу;

— розв'язування типових задач;

— організації самостійної роботи учнів, контролю навчальних досягнень учнів із засвоєння навчального матеріалу модуля.

Таким чином, рекомендації стосуються усіх складових процесу навчання геометрії: визначення мети та її конкретизації й уточнення, планування на різних рівнях, змісту навчання, методики викладення матеріалу, організації пізнавальної діяльності учнів, контролю їхніх навчальних досягнень. Вони спрямовані на забезпечення технологічності навчання стереометрії. Безумовно, їхня реалізація в конкретних умовах потребує врахування цих умов і відповідної адаптації до особливостей навчального закладу, контингенту учнів, досвіду, поглядів і смаків вчителя. Головне їхнє призначення — допомогти вчителю знайти оптимальний варіант навчання стереометрії за вказаним навчально-методичним комплектом.

Посібник може бути використаний і при роботі з іншими підручниками.

Розділ 1
ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

ВСТУП

Тривалий час характер шкільної геометричної освіти в Україні значною мірою визначався лише одним підручником. У зв'язку з реформуванням освіти взагалі та математичної зокрема настав час реалізувати альтернативні підходи, урізноманітнити навчально-методичне забезпечення навчання геометрії. Цього вимагає концепція реформування освіти в Україні, зокрема впровадження диференційованого навчання.

На особливу увагу заслуговує забезпечення профільного навчання геометрії в старшій школі, тобто створення відповідної навчально-методичної бази. А це водночас потребує глибокого аналізу змін у сучасній вітчизняній школі взагалі та профільній зокрема. Головною метою цього розділу є осмислення проблем навчання стереометрії у профільних класах природничо-математичного спрямування.

1.1. ПРО ГЕОМЕТРИЧНУ ОСВІТУ

Геометричні знання в усі часи складали серцевину повноцінної загальної освіти. Чому це так, у чому феномен геометричної освіти, що дає змогу доволі спеціальній науці міцно триматись протягом тисячоліть у чільній трійці-п'ятірці обов'язкових для вивчення дисциплін? Відповіді на ці запитання давались у стислій чи розгорнутій формі неодноразово. Згадаємо лише чудову працю Ф. Клейна [34] майже столітньої давності і концепцію шкільної геометрії І.Ф. Шаригіна [52], а також статтю А.Д. Александрова [1]. Однак і в цих працях, і в безлічі інших публікацій йшлося та йдеться про численні проблеми у визначенні змісту геометричної освіти, методики викладання геометрії.

Характерно, що з часів Ф. Клейна сучасній школі так і не вдалось знайти компроміс між «геометрією Евкліда» і нагальними потребами в геометричній освіті. Значною мірою це пов'язано з тим, що при викладанні геометрії треба сумістити полярні «лід логіки і жар уявлень» [1], а ще необхідно задовольнити доволі широкий спектр прикладних запитів (про які, до речі, багато кажуть, але, за великим рахунком, вони і не забезпечуються).

Пошук шляхів реформування геометричної освіти в школі — одне з найважливіших і найскладніших завдань реформи математичної освіти взагалі.

1.1.1. ГЕОМЕТРІЯ ЯК НАУКА

Найбільш поширеною точкою зору на геометрію є та, що вона — один зі специфічних засобів відображення реального світу. Ця специфічність має і фізіологічне походження. Зовсім недавно (у другій половині XX ст.) була встановлена несиметричність головного мозку людини [11]: його ліва півкуля відповідає за логічний аналіз, вона ж керує мовою, письмом та іншими алгоритмічними процедурами, а уявлення, інтуїція, емоції, зорове і просторове сприймання та інші операції — продукт правої півкулі. Обидві півкулі забезпечують два важливих аспекти будь-якого процесу мислення: формально-логічний і мотиваційно-керувальний. Для першого аспекту характерним є логічне впорядковування інформації, символізм дій, а для другого — синтетичний характер мислення. Вказаній різниці між функціями півкуль відповідає умовний поділ математики на «алгебру» і «геометрію», а математиків — на «алгебраїстів» і «геометрів». Історія математики дає багато прикладів видатних математиків, які були більшою мірою алгебраїстами, ніж геометрами (Г. Лейбніц, П. Ферма, К. Вейєрштрас, Г. Грасман), і навпаки (І. Ньютон, Р. Декарт, Г. Ріман, У. Гамільтон). Безумовно, є багато прикладів гармонійних математиків (Архімед, Д. Гільберт, А. Колмогоров). Такий розподіл існує також серед тих, хто вивчає математику і хто навчає учнів.

Таким чином, геометрія може бути охарактеризована як відображення у соціальному досвіді специфічного стилю мислення, призначеного для сприйняття фізичного простору. Як слушно зазначає А.Д. Александров: «Геометрія є поєднанням живого уявлення і строгої логіки, в якому вони взаємно організовують і направляють одне одного» [1].

Безумовно, вказана характеристика не вичерпує змісту поняття геометрії. Опис предмета геометрії є не менш важливим засобом її визначення. Геометрія — розділ математики, предметом якого є фігури, їхні властивості і відношення між ними. Ця характеристика предмета геометрії потребує роз'яснення з багатьох причин, зокрема з огляду на існування «різних» геометрій: евклідової, або елементарної, геометрії, аналітичної, диференціальної, неевклідової тощо.

Геометрія виникла з потреб практики, що знайшло відображення в її назві: «гео» — земля, «метріо» — вимірювання. До VII ст. до н. е. геометрія мала емпіричний характер і призначалася цілковито для забезпечення потреб практичної діяльності людей. Об'єктом цієї геометрії були фізичні тіла. Завдяки зусиллям грецьких математиків VII–III ст. до н. е. геометрія стала зразком побудови наукових теорій. Саме в геометрії вперше було застосовано аксіоматичний метод, який характеризується виділенням первісних понять і відношень та побудовою теорії за допомогою дедуктивного методу. Геометрію Стародавньої Греції було викладено в книгах Евкліда. Вона не спиралась на методи алгебри, а оперувала безпосередньо геометричними образами.

Практично два тисячоліття евклідова геометрія була єдиним представником геометрій. Відкриття методу координат і його застосування привело до створення аналітичної геометрії у XVII ст. завдяки роботам Р. Декарта і П. Ферма. На відміну від евклідової геометрії, для якої головним методом був синтетичний, в аналітичній геометрії головним інструментом доведень був метод координат (хоча аналітична геометрія теж викладається дедуктивно). Цей метод дав змогу «алгебраїзувати» геометричні задачі, звести їх до алгебраїчних перетворень і обчислень.

Розвиток методів математичного аналізу в XVII–XVIII ст. сприяв їхньому широкому застосуванню в геометрії. Це значно розширило коло фігур, які розглядалися, і поглибило дослідження їхніх властивостей. Так виникла диференціальна геометрія, яка вивчає криві і поверхні за допомогою методів математичного аналізу.

У першій половині XIX ст. були відкриті неевклідові геометрії, хоча на найпростішу з них — сферичну — людство звернуло увагу ще на початку нашої ери.

До цього часу вже з'явилися нарисна геометрія, в якій просторові фігури, а також методи розв'язування і дослідження просторових задач вивчаються за допомогою побудови їхніх зображень на площині, проективна геометрія, яка вивчає властивості фігур, що не змінюються при так званих проективних перетвореннях, наприклад, при проектуванні. Наприкінці XIX — на початку XX ст. виникла нова геометрія — топологія. Її ще називають геометрією гумової плівки.

ПЕРЕЛІК ВИДІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Види геометричної діяльності:

- обчислення відстаней та кутів у просторі;
- застосовування векторів для обчислення геометричних і фізичних величин;
- використання координат у просторі для вимірювання відстаней, кутів;
- обчислення, порівняння, оцінювання значень геометричних величин (довжин, кутів, площ перерізів, площ поверхонь, об'ємів);
- виконання необхідних вимірювань для досягнення поставленої мети з урахуванням можливості їхньої практичної реалізації й ефективності.

ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ

1. Яку найбільшу довжину може мати відрізок, що міститься у прямому круговому циліндрі з висотою 8 см і радіусом основи 3 см?

2. Знайдіть відстань між двома паралельними площинами, якщо відрізок, що з'єднує точки цих площин, має довжину 6 м і нахилений до площини основи під кутом 60°.

3. Визначте довжину дроту, протягнутого від стовпа до будинку, відстань між якими становить 12 м, а висота кріплення дроту на стовпі та будинку дорівнює відповідно 8 м і 3 м.

4. Визначте величину двогранного кута, якщо точка, взята на одній грані, віддалена від ребра вдвічі більше, ніж від іншої грані.

5. Нехай $SABC$ — правильна трикутна піраміда, M — середина ребра BC, $SO \perp AM$ (рис. 1.5). Вкажіть на рисунку висоту піраміди й апофему. Серед кутів $\angle SCO$, $\angle SAD$, $\angle SMO$ і $\angle ASO$ виберіть ті, якими вимірюються: **а)** кут між бічним ребром і площиною основи; **б)** кут між бічною гранню і площиною основи.

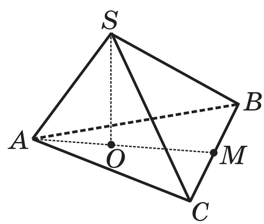

Рис. 1.5

6. Знайдіть величину рівнодійної трьох взаємно перпендикулярних сил F_1, F_2 і F_3, якщо $|F_1| = 2$ Н, $|F_2| = 3$ Н, $|F_3| = 6$ Н.

7. Знайдіть величину рівнодійної трьох сил $F_1 = (2;\ 3;\ -4)$, $F_2 = (-5;\ 2;\ 1)$, $F_3 = (3;\ -4;\ 2)$.

8. Дано точки простору $A(1;\ 0;\ -2)$, $B(3;\ -2;\ -1)$, $C(-3;\ 1;\ -1)$ і $D(4;\ -4;\ 2)$. Визначте:

а) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

б) довжину медіани AK трикутника ABC.

9. Визначте площу перерізу правильної трикутної призми площиною, що проходить через ребро нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, якщо висота призми дорівнює H, а сторона основи — a.

10. Визначте площу перерізу правильної чотирикутної призми зі стороною основи 2 і висотою 4 площиною, що проходить через середину суміжних ребер основи паралельно бічному ребру.

11. Обчисліть площу перерізу кулі з радіусом 5 дм площиною, віддаленою від центра кулі на 3 дм.

12. У скільки разів площа осьового перерізу прямого кругового циліндра менша за площу його бічної поверхні?

13. Радіус основи прямого кругового конуса дорівнює 3 см, а його об'єм — 9π см^3. Знайдіть довжину твірної конуса та площу бічної поверхні.

14. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 60°. Обчисліть об'єм піраміди і площу її поверхні.

15. Діаметр кулі дорівнює 1 м. Площина розміщена на відстані 0,5 м від центра кулі. Визначте взаємне розміщення кулі і площини.

16. У скільки разів збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити в 2 рази?

17. Зробіть необхідні вимірювання і визначте об'єм та площу поверхні правильної трикутної призми і правильної трикутної піраміди.

18. Обчисліть кількість шпалер (у кв. м), необхідних для обклеювання класної кімнати розміром 5×13×3,5 (м).

19. Об'єм металевого куба дорівнює 27 см^3. Знайдіть об'єм та площу поверхні кулі, в яку переплавлено куб.

20. Обчисліть об'єм найбільшого бруса з квадратною основою, який можна витесати з колоди циліндричної форми. Довжина колоди дорівнює 5 м, а товщина — 20 см.

21. Сталева труба, стінки якої завтовшки 2 см, має внутрішній діаметр 10 см. Знайдіть масу 5 м цієї труби, якщо густина металу дорівнює 7,8 г/см^3.

22. Обчисліть об'єм будівельної конструкції, форма і розміри якої (у дм) подані на рис. 1.6.

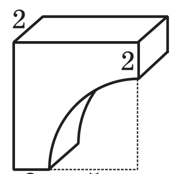

Рис. 1.6