§ 1 НЕРІВНОСТІ

- У цьому параграфі ви дізнаєтеся, у якому випадку число a вважають більшим (меншим), ніж число b; вивчите властивості числових нерівностей; дізнаєтеся, що називають розв'язком нерівності з однією змінною, розв'язком системи нерівностей з однією змінною.
- Ви навчитеся оцінювати значення виразів, доводити нерівності, розв'язувати лінійні нерівності та системи лінійних нерівностей з однією змінною.

1. Числові нерівності

На практиці вам часто доводиться порівнювати величини. Наприклад, площа спортивного залу більша за площу класної кімнати, площа України (603,5 тис. км^2) більша за площу Франції (551,5 тис. км^2), висота гори Роман-Кош (1545 м) менша від висоти гори Говерли (2061 м), відстань від Києва до Харкова (450 км) дорівнює 0,011 довжини екватора.

Результати таких порівнянь можна записувати у вигляді числових нерівностей, використовуючи знаки $>$, $<$.

Якщо число a більше за число b, то пишуть: $a > b$; якщо число a менше від числа b, то пишуть: $a < b$.

Очевидно, що $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливість цих нерівностей випливає з правил порівняння дійсних чисел, які ви вивчали в попередніх класах.

Проте числа можна порівнювати не лише за допомогою правил, які було вивчено раніше. Інший спосіб, більш універсальний, заснований на таких очевидних міркуваннях: якщо різниця двох чисел є додатною, то зменшуване більше за від'ємник, якщо ж різниця від'ємна, то зменшуване менше від від'ємника.

Ці міркування підказують, що зручно прийняти таке означення.

Означення. **Число a вважають більшим за число b, якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають меншим від числа b, якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.**

Це означення дає змогу задачу про порівняння двох чисел звести до задачі про порівняння їхньої різниці з нулем. Наприклад, щоби порівняти значення виразів $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ і $2-\sqrt{3}$, розглянемо їхню різницю:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Оскільки $\frac{1}{2+\sqrt{3}}>0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$.

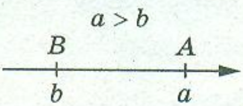

Рис. 1.1

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від'ємною, або рівною нулю, тому *для будь-яких чисел a і b справедливе одне й тільки одне з таких співвідношень:* $a>b$, $a<b$, $a=b$.

Якщо $a>b$, то точка, яка зображає число a на координатній прямій, лежить праворуч від точки, яка зображає число b (рис. 1.1).

Часто в повсякденному житті ми користуємося висловами «не більше», «не менше». Наприклад, відповідно до санітарних норм кількість учнів у класі має бути не більшою за 30. Дорожній знак, зображений на рисунку 1.2, означає, що швидкість руху автомобіля має бути не меншою від 30 км/год.

Рис. 1.2

У математиці для вислову «не більше» використовують знак $\leqslant$ (читають: «менше або дорівнює»), а для вислову «не менше» — знак $\geqslant$ (читають: «більше або дорівнює»).

Якщо $a<b$ або $a=b$, то є правильною нерівність $a\leqslant b$.

Якщо $a>b$ або $a=b$, то є правильною нерівність $a\geqslant b$.

Наприклад, нерівності $7\leqslant 7$, $7\leqslant 15$, $-3\geqslant -5$ є правильними. Зауважимо, що, наприклад, нерівність $7\leqslant 5$ є неправильною.

Знаки $<$ і $>$ називають знаками **строгої** нерівності, а знаки $\leqslant$ і $\geqslant$ називають знаками **нестрогої** нерівності.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що при будь-яких значеннях a є правильною нерівність

$$(a+1)(a+2)>a\,(a+3).$$

Розв'язання. Для розв'язання достатньо показати, що при будь-якому значенні a різниця лівої та правої частин даної нерівності є додатною. Маємо:

$$(a+1)(a+2)-a\,(a+3)=a^2+2a+a+2-a^2-3a=2.$$

У таких випадках говорять, що **доведено нерівність**

$$(a+1)(a+2)>a\,(a+3).$$