

РОЗДІЛ 1

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості рівнянь з однією змінною;
- **ознайомитеся** з лінійним рівнянням з однією змінною;
- **навчитесь** розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться; текстові задачі за допомогою рівнянь.

$$ax = b$$

$$2x = -3$$


$$15x = 0$$

§ 1. Загальні відомості про рівняння

Рівняння та його розв'язки


Упродовж багатьох століть алгебра розвивалася як наука про рівняння.

Рівнянням називають рівність, яка містить змінну.

 Основні відомості про рівняння ви вже знаєте з попередніх класів. Вираз, записаний у рівнянні ліворуч від знака рівності, називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч, – *правою частиною рівняння*.

Якщо в рівняння $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то одержимо правильну числову рівність: $4 \cdot 2 - 6 = 2$, адже числові значення обох частин рівняння будуть між собою рівні. У такому разі про число 2 кажуть, що воно є *коренем рівняння*.

Значення змінної, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність, називають **коренем** (або **розв'язком**) **рівняння**.

 Про число, яке є коренем рівняння, ще кажуть, що воно **задовольняє рівняння**.

Різні рівняння можуть мати різну кількість коренів.

Наприклад, рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь – число 2. Рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені – числа 0 і 6. Рівняння

$x + 0,1 = 0,1 + x$ задовольнятиме будь-яке значення змінної x , тобто будь-яке число є його коренем, отже, це рівняння має безліч коренів. Але не існує жодного значення змінної x , яке б перетворювало рівняння $x + 1 = x$ у правильну числову рівність, адже для кожного значення змінної x значення лівої частини рівняння буде на 1 перевищувати значення правої його частини. Тому рівняння $x + 1 = x$ коренів не має.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Рівносильні рівняння

Розглянемо рівняння $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має єдиний корінь – число 4. Ці рівняння є *рівносильними*.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

Приклад 1. Чи рівносильні рівняння: 1) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$;

2) $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$;

3) $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$?

Розв'язання. 1) Коренем рівняння $x + 3 = 4$ є число 1, а коренем рівняння $5x = 10$ – число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.

2) Кожне з рівнянь $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не має коренів, тому ці рівняння є рівносильними.

3) Коренем рівняння $18 - x = 11$ є число 7. Коренем рівняння $21 : x = 3$ також є число 7. Тому рівняння $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$ – рівносильні.

Відповідь: 1) ні; 2), 3) так.

Властивості рівнянь

Для розв'язування рівнянь використовують *властивості*, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:

- 1) $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$;
- 2) $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$;
- 3) $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$;
- 4) $0,5b = 1,5b - 3,5$ і $b = 3b - 7$.

• *Розв'язання.* 1) Рівняння $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$ є рівносильними, оскільки друге рівняння одержуємо з першого розкриттям дужок у його лівій частині.

• 2) Рівняння $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого зведенням подібних доданків у його правій частині.

• 3) Рівняння $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого перенесенням доданка з правої частини рівняння в ліву зі зміною знака цього доданка на протилежний.

• 4) Рівняння $0,5b = 1,5b - 3,5$ і $b = 3b - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо шляхом множення на 2 обох частин першого рівняння.

• *Відповідь:* 1) – 4) так, рівняння рівносильні.

А ще раніше...

У IX ст. видатний арабський математик Мухаммед бен Муса Аль-Хорезмі у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував наявні на той час методи розв'язування рівнянь.

Узятий з назви цієї книжки термін «аль-джебр» (у перекладі з арабської означає «відновлення») надалі став уживатися як «алгебра» і дав назву цілій науці.

У ті часи, коли Аль-Хорезмі писав свій трактат, від'ємні числа вважалися хибними, несправжніми. Тому коли від'ємне число переносили з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи його знак, вважали, що воно «відновлюється» (стає додатним), тобто з несправжнього перетворюється на справжнє. Саме таке перетворення рівнянь Аль-Хорезмі й назвав «відновленням».