

ЗАДАЧІ

Розділ 1

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПЛОЩИНІ

Позначення: a, b, c — сторони трикутника; A, B, C — кути, що лежать навпроти цих сторін, відповідно; m_a — медіана сторони a ; l_A — бісектриса кута A ; h_a — висота, опущена на сторону a ; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; P — периметр багатокутника.

Довжиною бісектриси зовнішнього кута A' відносно внутрішнього кута A трикутника називається відрізок бісектриси, що сполучає точку A і точку перетину бісектриси з продовженням сторони a .

Відношення площ двох трикутників, що мають спільний кут, дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють цей спільний кут.

Формула, що виражає довжину медіани трикутника через довжини його сторін: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Якщо в багатокутник можна вписати коло, то його площа $S = pr$, де $P = \frac{p}{2}$ — півпериметр багатокутника.

Площа чотирикутника: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$, де d_1 і d_2 — довжини його діагоналей, а α — кут між ними.

При розв'язанні планіметричних задач доводиться застосовувати похідні пропорції.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}.$$

$$\text{Якщо } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}, \text{ то}$$

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \dots \pm b_n} = \frac{c}{d} \text{ і } \frac{m_1 a_1 \pm m_2 a_2 \pm m_3 a_3 \pm \dots \pm m_n a_n}{m_1 b_1 \pm m_2 b_2 \pm m_3 b_3 \pm \dots \pm m_n b_n} = \frac{c}{d},$$

де комбінація знаків береться будь-якою, але однаковою для чисельника і знаменника.

1.1. Навколо правильного трикутника ABC описано коло O радіусом R . Коло O_1 дотикається до двох сторін AB і BC трикутника і кола O . Знайдіть відстань від центра кола O_1 до вершини A .

1.2. Висота рівнобедреного трикутника з кутом α при основі більша від радіуса вписаного в нього кола на m . Визначте основу трикутника і радіус описаного кола.

1.3. Доведіть, що радіус кола, яке ділить навпіл сторони трикутника, вдвічі менший від радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

1.4. У трикутнику сполучені основи бісектрис. Знайдіть відношення площі даного трикутника до площі трикутника, що утворився, якщо сторони даного трикутника співвідносяться як $p : q : l$.

1.5. Дано кути A, B, C трикутника ABC . Нехай коло дотикається до сторін BC, AC і AB трикутника відповідно в точках A_1, B_1, C_1 . Знайдіть відношення площі трикутника $A_1B_1C_1$ до площі трикутника ABC .

1.6. Дано трикутник ABC , кути B і C якого співвідносяться як $3 : 1$, а бісектриса кута A ділить площу трикутника у співвідношенні $2 : 1$. Знайдіть кути трикутника.

1.7. Знайдіть довжину l бісектриси зовнішнього кута відносно кута A трикутника, якщо задано його сторони b і c і кут A між ними ($b \neq c$).

1.8. У трикутнику площею S з гострим кутом α при вершині A бісектриса кута A в p разів менша від радіуса описаного і в q разів більша від радіуса вписаного круга. Знайдіть сторону трикутника, що лежить навпроти кута A .

1.9. У трикутнику ABC проведені бісектриси AM і BN . Нехай O — точка їх перетину. Відомо, що

$$AO : OM = \sqrt{3} : 1, \text{ а } BO : ON = 1 : (\sqrt{3} - 1).$$

Знайдіть кути трикутника.

1.10. Всередині кута α узято точку M . Її проєкції P і Q на сторони кута віддалені від вершини O кута на відстані $OP = p$ і $OQ = q$. Знайдіть відстані MP і MQ від точки M до сторін кута.

1.11. У гострокутному трикутнику дві висоти дорівнюють 3 см і $2\sqrt{2}$ см, а їхня точка перетину ділить третю висоту у співвідношенні $5 : 1$, рахуючи від вершини трикутника. Знайдіть площу трикутника.

1.12. У трикутнику ABC різниця кутів B і C дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Визначте кут C , якщо відомо, що сума сторін AC і AB становить k , а висота, опущена з вершини A , дорівнює h .

1.13. У трикутнику ABC є точка O , така, що кути ABO , BCO і CAO дорівнюють α . Виразіть $\text{ctg } \alpha$ через площу трикутника і його сторони.

1.14. У трикутнику ABC дано різницю φ кутів A і B ($\varphi = A - B > 0$). Відомо, що висота, опущена з C на AB , дорівнює $BC - AC$. Знайдіть кути трикутника.

1.15. Дано довжини висот $AA_1 = h_a$ і $BB_1 = h_b$ трикутника ABC і довжина $CD = l$ бісектриси кута C . Знайдіть кут C .

1.16. У трикутник з основою a і протилежним кутом α вписано коло. Через центр цього кола і кінці основи трикутника проведено друге коло. Знайдіть його радіус.

1.17. Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то центр кола, вписаного в цей трикутник, і точка перетину його медіан лежать на прямій, паралельній середній за довжиною стороні трикутника.

1.18. У трикутнику ABC радіус вписаного кола дорівнює r , сторона BC більша від r у k разів, а висота, опущена на цю сторону, більша від r вчетверо. Знайдіть півпериметр p , $\text{tg } \frac{A}{2}$, сторони b і c .

1.19. Кути C , A , B трикутника ABC утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Нехай O — центр кола, вписаного в трикутник ABC , K — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони AC , L — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони BC . Доведіть, що трикутники ABC і OKL подібні.

1.20. У трикутнику ABC кути A , B і C утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Доведіть, що

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1.21. Доведіть, що якщо P , Q , R — відповідно точки перетину кожної зі сторін BC , CA , AB (або їх продовжень) трикутника ABC з деякою прямою, то

$$\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot QC \cdot BP} = 1$$

(теорема Менелая).

1.22. Точка D знаходиться на стороні BC трикутника ABC . Доведіть, що

$$AB^2 \square DC + AC^2 \square BD - AD^2 \square BC = BC \square DC \square BD$$

(теорема Стюарта).

1.23. На сторонах трикутника ABC узяті точки P , Q і R так, що три прямі AP , BQ і CR перетинаються в одній точці. Доведіть, що

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(теорема Чеві).

1.24. Через довільну точку O , узятую всередині трикутника ABC , проведені прямі DE , FK , MN , паралельні відповідно AB , AC , BC , причому F і M лежать на AB , E і K — на BC , N і D — на AC . Доведіть, що

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

1.25. Через центр O правильного трикутника ABC провели довільну пряму. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин трикутника до цієї прямої не залежить від розміщення прямої.

1.26. Навколо трикутника ABC , в якому $a = 2$, $b = 3$ і кут $C = 60^\circ$, описано коло. Визначте радіуси кіл, що проходять через дві вершини трикутника і центр описаного кола.

1.27. Сторони трикутника зв'язані співвідношенням $a^2 = c(b + c)$. Доведіть, що кут A удвічі більший від кута C .

1.28. Нехай O — центр кола, вписаного в трикутник ABC . Доведіть, що якщо $OA^2 = OB \square OC$, то

$$\cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}.$$

1.29. Площа S трикутника ABC задовольняє співвідношення $S = a^2 - (b - c)^2$. Знайдіть кут A .

1.30. На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Доведіть, що відстань між центрами квадратів, побудованих на бічних сторонах, дорівнює відстані від центра квадрата, побудованого на основі, до протилежної вершини трикутника.

1.31. У трикутнику ABC одиничної площі проведений відрізок AD , що перетинає медіану CF у точці M , причому $FM = \frac{1}{4}CF$.

Знайдіть площу трикутника ABD .

1.32. Доведіть, що добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін (*теорема Птолемея*).

1.33. Відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює їхній піврізниці. Знайдіть суму кутів при більшій основі трапеції.

1.34. Через центр квадрата $ABCD$ провели пряму, що перетинає сторону AB у точці N , причому $AN : NB = 1 : 2$. На цій прямій узяли довільну точку M , яка лежить всередині квадрата. Доведіть, що відстані від точки M до сторін квадрата AB , AD , BC і CD , узяті в названому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

1.35. Квадрат і правильний трикутник, які мають спільну вершину, вписані в коло одиничного радіуса. Знайдіть площу, покриту і квадратом, і трикутником.

1.36. У коло вписані трапеція і рівнобедрений гострокутний трикутник площею S таким чином, що більша основа трапеції співпадає з діаметром кола, а бічні сторони паралельні бічним сторонам трикутника. Середня лінія трапеції дорівнює l . Знайдіть висоту трапеції.

1.37. Знайдіть відношення площі трапеції $ABCD$ до площі трикутника AOD , де O — точка перетину діагоналей трапеції, якщо

$$\text{відомо, що } \frac{BC}{AD} = p.$$

1.38. Два правильні многокутники з периметрами a і b описані навколо кола, а третій правильний многокутник вписаний в це коло. Другий і третій многокутники мають кожен удвічі більше сторін, ніж перший. Знайдіть периметр третього многокутника.

1.39. Усередині кута AOB , меншого від π , дано точку M , що знаходиться на відстані a від вершини кута. Відрізок OM утворює кути α і β зі сторонами кута AOB . Знайдіть радіус R кола, що проходить через M і відсікає на сторонах кута AOB хорди, що дорівнюють $2a$.

1.40. Із зовнішньої точки A провели дві взаємно перпендикулярні січні ABD і ACE до кола з центром O . Площі трикутників ABC і ADE співвідносяться як $m : n$. Визначте величини дуг BC і DE , кожна з яких менша від півкола.

1.41. З точки A , що лежить на колі радіуса r , проведено дві хорди AC і AB . Ці хорди лежать по один бік від діаметра кола, що проходить через точку A . Довжина більшої хорди дорівнює b , а кут BAC дорівнює α . Знайдіть радіус кола, яке дотикається до хорд AB і AC та дуги BC .